

EXERCICE 1. (8 points)

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois. 40% des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange et 25% des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ». Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x , où x est un réel de l'intervalle $[0; 1]$. Par ailleurs, 20% des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ». On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange et J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

- ▶ 1. Déterminer la valeur exacte de x . On s'aidera d'un arbre pondéré.
- ▶ 2. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ». Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B : Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 100 dernières bouteilles de jus de fruits vendues. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot. On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 100 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

- ▶ 1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X . On en donnera les paramètres.
- ▶ 2. Déterminer la probabilité pour que 20 bouteilles de cet échantillon de 100 bouteilles soient de « pur jus ». On donnera une valeur exacte puis une valeur arrondie au millième.

Partie C : Un fournisseur assure que 90% des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2% de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 300 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 255 bouteilles présentent moins de 2% de pulpe. Que penser de l'affirmation du fournisseur ? Justifier

Valeur k	$P(Y \leq k)$	Valeur k	$P(Y \leq k)$	Valeur k	$P(Y \leq k)$
256	0,00664857	265	0,19135278	274	0,80509794
257	0,01064482	266	0,24584017	275	0,85608398
258	0,0166392	267	0,30828638	276	0,89764869
259	0,02538776	268	0,37748984	277	0,93006016
260	0,03780398	269	0,45158128	278	0,95419388
261	0,0549298	270	0,52814243	279	0,97132104
262	0,07787318	271	0,60442107	280	0,98288187
263	0,10770829	272	0,67761491	281	0,99028738
264	0,14534121	273	0,74517845	282	0,99477796

où $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(300; 0.9)$

EXERCICE 2. (12 points)

PARTIE 1 : Soit la fonction $g(x) = e^x - x$ définie sur \mathbb{R} .

- ▶ 1. Déterminer les limites, aux bornes de l'ensemble de définition, de g .
- ▶ 2. Etudier, en justifiant, les variations de la fonction g .
- ▶ 3. En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x > 0$.

PARTIE 2 : Soit la fonction $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ définie sur \mathbb{R} .

- ▶ 1. Déterminer les limites, aux bornes de l'ensemble de définition, de f . La courbe de f admet-elle des asymptotes ?
- ▶ 2. Etudier la position relative de la courbe de la fonction f avec les droites $y = 0$ et $y = -1$.
- ▶ 3. Etudier, en justifiant, les variations de la fonction f .
- ▶ 4. Existe-t-il une tangente à la courbe de f qui ait pour pente 0,5 ? *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*