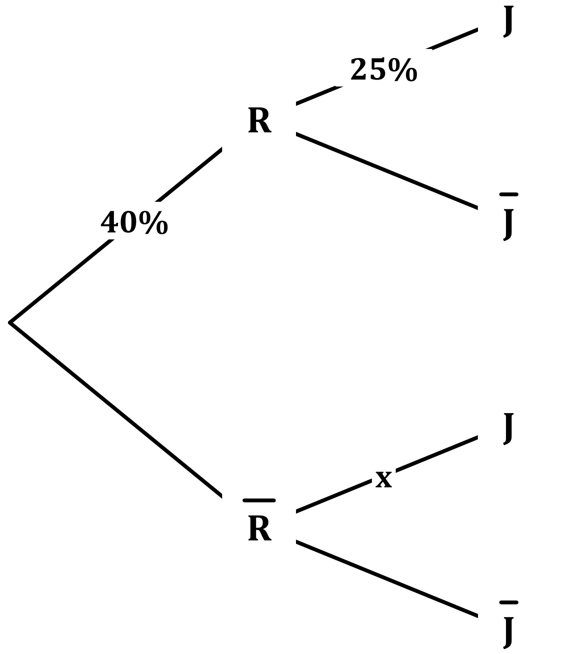
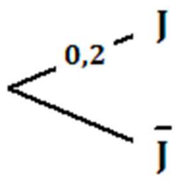
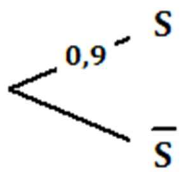
Exercice 1.	**A1.**	 	On sait que $P(J) = 20\% = 0{,}2$ De plus $P(J) = P(J \cap R) + P(J \cap \bar{R})$ $P(J) = 0{,}4\times 0{,}25 + (1-0{,}4)x$ $P(J) = 0{,}1 + 0{,}6x$ Résolvons alors : $0{,}1 + 0{,}6x = 0{,}2$ $\Leftrightarrow 0{,}6x = 0{,}1$ $\Leftrightarrow x = \frac{0{,}1}{0{,}6} = \frac{1}{6}$	2
	A2.	$P_J(R) = \frac{P(J\cap R)}{P(J)} = \frac{0{,}4\times 0{,}25}{0{,}2} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = \frac{1}{2}$		1
	B1.	On répète 100 fois, de façon identique et indépendante, l'alternative  X , le nombre de bouteille « pur jus » suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0.2)$.		1
	B2.	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(100; 0.2)$ Donc $P(X=20) = \binom{100}{20}\times 0{,}2^{20}\times 0{,}8^{80} \approx$		2
	C	Notons S l'événement une bouteille, choisie au hasard, contient moins de 2% de pulpe. Et, notons Y le nombre de bouteille contenant mois de 2% de pulpe parmi les 300 bouteilles prélevées. On répète 300 fois, de façon identique et indépendante, l'alternative  donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(300; 0.9)$ D'après le tableau ci-dessous : $P(258 \le Y \le 280) = P(Y \le 280) - P(Y \le 257)$ $P(258 \le Y \le 280) \approx 0{,}9829 - 0{,}0106 \approx 0{,}9723 > 95\%$ « Normalement », le nombre de bouteilles contenant moins de 2% de pulpe devrait être compris entre 258 et 280. L'échantillon contenant seulement 255 bouteilles est trop faible. Avec un risque d'erreur de 5%, je peux dire que l'affirmation du fournisseur est fausse. La proportion doit, sûrement, être inférieur à 90%.		2

Exercice 2.

Partie 1.

1. (2)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = e^x - x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right\}\text{par soustraction } \color{red}{\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\}\text{par soustraction la forme est indéterminée}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ g(x) = e^x - x = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = +\infty\end{array}\right\}\text{par produit } \color{red}{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$$

2. (2)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g'(x) = e^x - 1$

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\Leftrightarrow e^x - 1 > 0\\ &\Leftrightarrow e^x > 1 = e^0\\ &\Leftrightarrow x > 0\end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$g(0) = e^0 - 0 = 1$

3. (1)

On en déduit que 1 est le minimum de la fonction g donc
$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) = e^x - x \geq 1 > 0$.

Partie 2.

1. (2)

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \dfrac{x}{e^x - x} = \dfrac{x}{g(x)}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty\end{array}\right\}\text{par quotient la forme est indéterminée}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ f(x) = \dfrac{x}{e^x - x} = \dfrac{x\times 1}{x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right\}\text{par quotient } \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

et donc $\color{red}{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\end{array}\right\}\text{par quotient la forme est indéterminée}$$

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f(x) = \dfrac{x}{e^x - x} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = +\infty$ par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

La courbe de f admet donc deux asymptote horizontales :

$y = -1$ en $-\infty$ et $y = 0$ en $+\infty$.

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>**2.**</td><td>

Position relative avec $y = 0$:

Résolvons l'inéquation : $f(x) > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{e^x - x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

car d'après la partie 1 $e^x - x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Par conséquent, **sur $]-\infty; 0[$ la courbe de f est au-dessous de la droite $y = 0$, et, sur $]-\infty; 0[$, elle est au-dessus.**

Position relative avec $y = -1$:

Résolvons l'inéquation : $f(x) > -1$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{e^x - x} > -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{e^x - x} + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + e^x - x}{e^x - x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x - x} > 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x - x > 0$ et $e^x > 0$ donc $\frac{e^x}{e^x - x}$ sera positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, **la courbe de f est au-dessus de la droite $y = -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.**

</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>**3.**</td><td>

$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \dfrac{x}{e^x - x} = \dfrac{u}{v}$

$u = x \qquad u' = 1$

$v = e^x - x \qquad v' = e^x - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{1\times(e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{e^x - xe^x}{(e^x - x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{(1 - x)e^x}{(e^x - x)^2}$

</td><td>2</td></tr>
</table>

		3.	$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0$ car $e^x > 0$ et $(e^x - x)^2 > 0$ $\Leftrightarrow x < 1$ x : $-\infty$; 1 ; $+\infty$ $f'(x)$: $+$; 0 ; $-$ $f(x)$: $-1 \nearrow 1/(e-1) \searrow 0$ $f(1) = \dfrac{1}{e^1 - 1} = \dfrac{1}{e-1}$	
		4.	La pente des tangentes est donnée par la dérivée, a-t-on $f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x-x)^2} = 0{,}5$? La fonction f' est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. de plus $f'(0) = \dfrac{e^0}{(e^0)^2} = 1 > 0{,}5$ et $f'(1) = \dfrac{(1-1)e}{(e-1)^2} = 0 < 0{,}5$ D'après le théorème des valeurs intermédaires, l'équation $f'(x) = 0{,}5$ admet au moins une solution notée α dans l'intervalle $]0; 1[$. A l'aide de la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 0{,}59$. Il existe au moins une tangente à la courbe de f qui ait pour pente $0{,}5$: la tangente en $\alpha \approx 0{,}59$.	1