EXERCICE 1. (5 points)

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30% des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A.
On choisit au hasard un membre de cette association et on note F l'événement « le membre choisi est une femme » et T l'événement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

▶1. Démontrer que la probabilité de l'événement F est égale à $\frac{2}{5}$.

▶2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis. Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Partie B.
Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie. Semaine après semaine, on appelle Y la variable aléatoire qui correspond au nombre de membre de la section tennis choisi pour tenir la loterie.

▶1. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

▶2. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis. Démontrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

▶3. Pourquoi est-on sûr de trouver un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, on a $p_n \geq 0{,}99$?

EXERCICE 2. (6 points)

Partie A. On considère l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0 \ \ (E)$.

▶1. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$. Les solutions seront notées z' et z'' où z' désigne la solution ayant la partie imaginaire positive. Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

▶2. Donner la valeur exacte de $(z')^{2017}$ sous forme exponentielle.

Partie B. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On considère les points les points A d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, B d'affixe $z_B = \overline{z_A}$ et C d'affixe $z_C = -2$ et on pose $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$.

a) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe Z puis sa forme exponentielle.
b) Que peut-on en déduire pour le triangle ACB ? Justifier.

EXERCICE 3. (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. *Le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.*

▶1. Soit $z_1 = \sqrt{6}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

$a.\ \sqrt{3}\, e^{i\frac{19\pi}{12}}$ $\qquad b.\ \sqrt{12}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}$ $\qquad c.\ \sqrt{3}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$ $\qquad d.\ \sqrt{3}\, e^{i\frac{13\pi}{12}}$

▶2. L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue complexe z, admet :
a. une solution
b. deux solutions
c. une infinité de solutions dont les points images sont situés sur une droite.
d. une infinité de solutions dont les points images sont situés sur un cercle.

▶3. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+i| = |z-i|$.
a. $\mathcal{E}$ est l'axe des abscisses.
b. $\mathcal{E}$ est l'axe des ordonnées.
c. $\mathcal{E}$ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.
d. $\mathcal{E}$ est la médiatrice du segment $[OI]$ où I est le point d'affixe i.

▶4. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives z_B et z_C vérifient l'égalité $\dfrac{z_C}{z_B} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
a. Le triangle OBC est isocèle en O.
b. Les points O, B, C sont alignés.
c. Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.
d. Le triangle OBC est rectangle en B mais non isocèle.

EXERCICE 4. (5 points)

PARTIE A. On étudie la fonction $h(x) = (x+1)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.
▶1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.
La courbe représentative de h admet-elle une asymptote horizontale ou verticale ?
▶2. Démontrer que $h'(x) = (x+2)e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire le tableau de variations de la fonction h.

PARTIE B.
Soit m un nombre réel quelconque, on étudie maintenant la fonction
$f_m(x) = x + 1 - me^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction f_m dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan.
▶1. Démontre que $f_m(x) = 0$ si, et seulement si $h(x) = m$.
▶2. Déduire de la partie A le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.