EXERCICE 1. (8 points)

PARTIE A. On étudie la fonction $h(x) = 1 - \ln(x) + 2x^2$ définie sur $]0; +\infty[$.

▶1. Déterminer, en justifiant, les limites de h. La courbe de h admet-elle une asymptote ?

▶2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction h sur $]0; +\infty[$.

▶3. En déduire enfin le signe de la fonction h sur $]0; +\infty[$.

PARTIE B. On étudie maintenant la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} + 2x$ définie sur $]0; +\infty[$.

▶1. Déterminer, en justifiant, les limites de f. La courbe de f admet-elle une asymptote ?

▶2. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$, en déduire le tableau de variations de la fonction f.

▶3. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe de f au point d'abscisse 1.

▶4. Existe-t-il un point de la courbe représentative de h qui ait une tangente parallèle à la droite Δ ?

EXERCICE 2. (7 points)

▶1. Résoudre l'inéquation $2\ln(x) \geq \ln 2 + \ln(4 - x)$

▶2. Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$a)\ \mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 (x^2 + 3)\,dx$ $\qquad b)\ \mathrm{J} = \displaystyle\int_1^2 e^{-2x}\,dx$ $\qquad c)\ \mathrm{L} = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx$

$d)\ \mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 3}\,dx$ $\qquad e)\ \mathrm{M} = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x + 1)^3}\,dx$

EXERCICE 3. (5 points)

Les deux questions sont indépendantes.

▶1. On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par

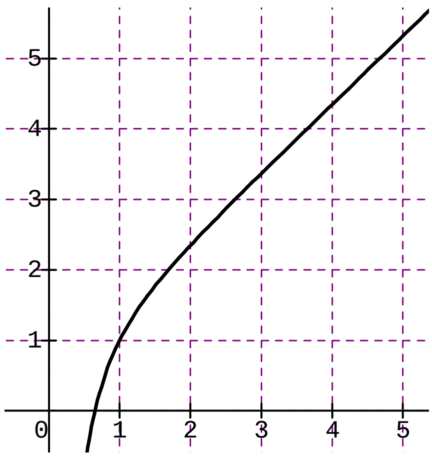
$$h(x) = x + \frac{\ln x}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ ci-contre.

a) Démontrer que $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}$.

b) En déduire l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$, $x = e$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_h$.

Hachurer cette région sur le graphique ci-contre.



▶2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le domaine $\mathcal{D}$ situé sous la parabole $y = x - x^2$ et au-dessus de l'axe des abscisses.

Déterminer la droite qui passe par l'origine et qui découpe le domaine $\mathcal{D}$ en deux surfaces de même aire.

(Toute trace de recherche sera prise en compte)