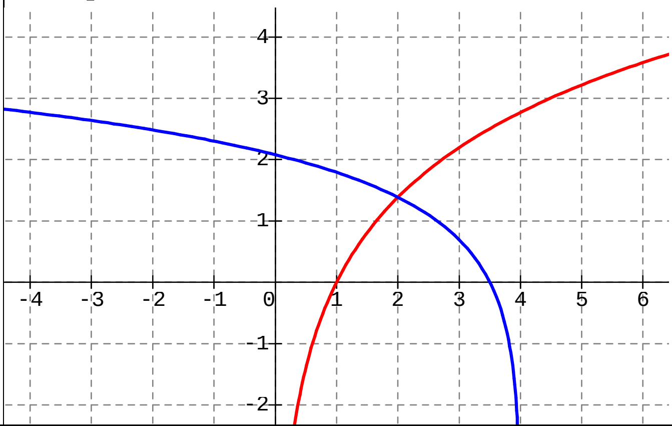
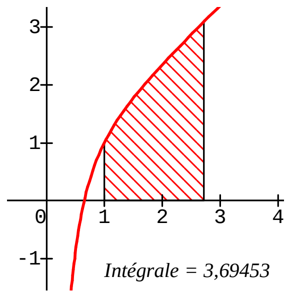
Exercice 1.

A1	$\lim_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$ La courbe de h admet donc la droite $x = 0$ comme asymptote verticale. $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty\end{array}\right\}$ donc la forme est indéterminée par addition $\forall x > 0,\ \ h(x) = x\left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + 2x\right)$ or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + 2x = +\infty\end{array}\right\}$ donc par produit, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$	**1,5**
A2	$\forall x > 0,\ \ h'(x) = -\frac{1}{x} + 4x = -\frac{1}{x} + \frac{4x^2}{x} = \frac{-1+4x^2}{x} = \frac{4x^2-1}{x}$. Pour $x \in]0;+\infty[$, $x > 0$ et $4x^2 - 1$ est tournée vers le haut et elle a pour racines $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. La parabole $4x^2 - 1$ est donc positive sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. x : 0 … $0{,}5$ … $+\infty$ $h'(x)$: $-$ 0 $+$ $h(x)$: $+\infty$ ↘ $1{,}5 - \ln 0{,}5 \approx 2{,}19$ ↗ $+\infty$	**1,5**
A3	h admet pour minimum $1{,}5 - \ln 0{,}5 \approx 2{,}19$ donc elle est toujours positive.	**0,5**
B1	$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ La courbe de f admet donc la droite $x = 0$ comme asymptote verticale. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	**1,5**
B2	$\forall x > 0,\ \ f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} = \frac{1 - \ln x + 2x^2}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$ $x^2 > 0$ et $h(x) > 0$ donc $f'(x)$ est positive sur $]0;+\infty[$. x : 0 … $+\infty$ $f'(x)$: $+$ $f(x)$: $-\infty$ ↗ $+\infty$	**1,5**
B3	$f'(1) = \frac{1-\ln 1+2}{1} = 3$ $\quad f(1) = \frac{\ln 1}{1} + 2 = 2$ donc $y = 3(x-1) + 2 = 3x - 1$	**0,5**

	B4	La pente de la tangente vaut 3, et la courbe de h pour pente $h'(x)$ $$h'(x)=\frac{4x^2-1}{x}=3 \Longrightarrow 4x^2-1=3x \Leftrightarrow 4x^2-3x-1=0$$ $\Delta = 9-4\times(-4)=25>0$ il y a donc deux racines : $$x_1=\frac{3-5}{8}=-\frac{1}{4}<0 \text{ exclu} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{3+5}{8}=1$$ La courbe de h aura donc une tangente parallèle à la droite Δ au point d'abscisse 1.	**1**
Exercice 2.	**1.**	$$2\ln(x)\geq \ln 2+\ln(4-x)$$ $$\Longrightarrow \ln(x^2)\geq \ln(8-2x)$$ $$\Leftrightarrow x^2+2x-8\geq 0$$ $\Delta = 4-4\times(-8)=36$, les racines sont $\dfrac{-2-6}{2}=-4$ et $\dfrac{-2+6}{2}=2$ La parabole est tournée vers le haut donc $x\in\ ]-\infty;-4]\cup[2;+\infty[$. D'autre part, l'équation est définie pour $x>0$ et $4-x>0 \Leftrightarrow x<4$ soit pour $x\in\ ]0;4[$.  En excluant les valeurs interdites, l'ensemble des solutions est $[2;4[$. En rouge, $x\mapsto 2\ln(x)$ En bleu, $x\mapsto \ln 2+\ln(4-x)$	**1**
	2.	$$\mathrm{I}=\int_0^1 (x^2+3)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^1=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$$	**1**
		$$\mathrm{J}=\int_1^2 e^{-2x}\,dx=\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_1^2=\frac{e^{-4}}{-2}-\frac{e^{-2}}{-2}=\frac{e^{-2}-e^{-4}}{2}=\frac{e^2-1}{2e^4}$$ $$\approx 0{,}0585$$	**1**
		$$\mathrm{L}=\int_0^{\pi}\sin(2x)\,dx=\left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{-\cos(2\pi)}{2}+\frac{\cos(0)}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$ $$=0$$	**1**
		$$\mathrm{J}=\int_0^1 \frac{x}{x^2+3}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+3)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln(4)-\frac{1}{2}\ln(3)$$ $$=\ln(2)-\ln(\sqrt{3})=\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\approx 0{,}1438$$	**1,5**

		$M = \int_0^2 \frac{1}{(x+1)^3}dx = \left[\frac{(x+1)^{-2}}{-2}\right]_0^2 = \left[\frac{-1}{2(x+1)^2}\right]_0^2 = \frac{-1}{18} + \frac{1}{2} = \frac{8}{18}$ $= \frac{4}{9}$	**1,5**
Exercice 3.	**1.**	$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \times \underbrace{\ln x}_{u}\, dx = \left[\underbrace{\frac{(\ln x)^2}{2}}_{\frac{u^2}{2}}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$	**2**
		La fonction $h(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ étant positive sur $[1; e]$, l'aire est égale à : $\int_1^e h(x)dx = \int_1^e xdx + \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e + \frac{1}{2}$ $= \frac{e^2}{2}$  	**2**
	2.	L'aire du domaine D est $\int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6}$ $= \frac{1}{6}$ La droite qui passe par l'origine a pour équation : $y = ax$ où $a \in \mathbb{R}$ Déterminons les points d'intersection entre la parabole et $y = ax$: $ax = x - x^2 \Leftrightarrow x(1 - a - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1 - a$ Les deux points d'intersection ont pour abscisse $x = 0$ ou $x = 1 - a$. L'aire du domaine situé entre la parabole et la droite $y = ax$ est : $\int_0^{1-a} (x - x^2 - ax)dx = \int_0^{1-a} \left((1-a)x - x^2\right)dx = \left[\frac{(1-a)x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$ $= \frac{(1-a)(1-a)^2}{2} - \frac{(1-a)^3}{3} = \frac{(1-a)^3}{6}$ $\frac{(1-a)^3}{6} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow (1-a)^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\approx 0{,}206$	**1**