TS – Fiche n°4. Démonstration par récurrence

Exercice 1.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = -4 + \frac{u_n}{5}$ et $u_0 = 0$.

Démontrer par récurrence que la suite est monotone.

Exercice 2.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ et $u_0 = 0$.

Démontrer par récurrence que la suite est bornée.

Exercice 3.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = -0{,}8\, u_n + 18$ et $u_0 = 4$.

Voici deux propositions, pour chacune d'elles, dire en justifiant si elle est vraie ou fausse :

P1 : « La suite (u_n) est croissante »

P2 : « Pour tout n entier naturel, $4 \leq u_n \leq 15$ »

Exercice 4.

La suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$ et $u_0 = 1$.

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 5.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que $u_n = \frac{1}{2^{n-1}} + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 6.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$.

Exercice 7.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.