# ❶ Comparaison de suites

**Propriété :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites

Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

## Démonstration

Soit $A \in \mathbb{R}$ fixé arbitrairement,

(Utilisation de l'hypothèse $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$)

puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors l'intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang $N_1$ :

$$n \geq N_1 \Rightarrow u_n > A$$

(Utilisation de l'hypothèse à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$)

or à partir d'un certain rang $N_2$, $n \geq N_2 \Rightarrow v_n \geq u_n$

(Conclusion)

On note $N$ le plus grand des rangs $N_1$ et $N_2$, on a alors

$$n \geq N \Rightarrow v_n \geq u_n > A$$

c'est à dire que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs $v_n$ à partir d'un certain rang $N$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ ■

# ❷ Propriété de la limite d'une suite croissante convergente

## Propriété

Si une suite est croissante et admet pour limite le nombre réel $l$, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à $l$.

## Démonstration

## Démonstration par l'absurde

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante qui admet pour limite le réel $l$ et on suppose la négation de « tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à $l$ » soit les termes de la suite ne sont pas tous inférieurs ou égaux à $l$.

On suppose qu'il existe un terme de la suite supérieur à $l$ :

$$u_{n_0} > l$$

(Utilisation de l'hypothèse la suite est croissante)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante donc pour tout $n \geq n_0$ $u_n \geq u_{n_0}$

(Utilisation de l'hypothèse il existe un terme supérieur à $l$ )

Puisque $u_{n_0} > l$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u_{n_0} = l + \varepsilon > l$

(Utilisation de l'hypothèse $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ )

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ donc l'intervalle ouvert $\left]l - \frac{\varepsilon}{2} ; l + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang $n_1$ donc pour tout

$$n \geq n_1 \Longrightarrow l - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_n \leq l + \frac{\varepsilon}{2}$$

(Conclusion)

Notons $N$ le plus grand des rangs $n_0$ et $n_1$ alors

$n \geq N \Longrightarrow l - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_n \leq l + \frac{\varepsilon}{2}$ et $u_n \geq u_{n_0}$ donc $u_n \geq l + \varepsilon$

C'est impossible, on ne peut pas avoir en même temps

$$u_n \leq l + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad u_n \geq l + \varepsilon$$

Ce qui implique que notre supposition de départ est fausse donc il n'existe pas de terme de la suite supérieur à $l$ ou encore tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à $l$ ■