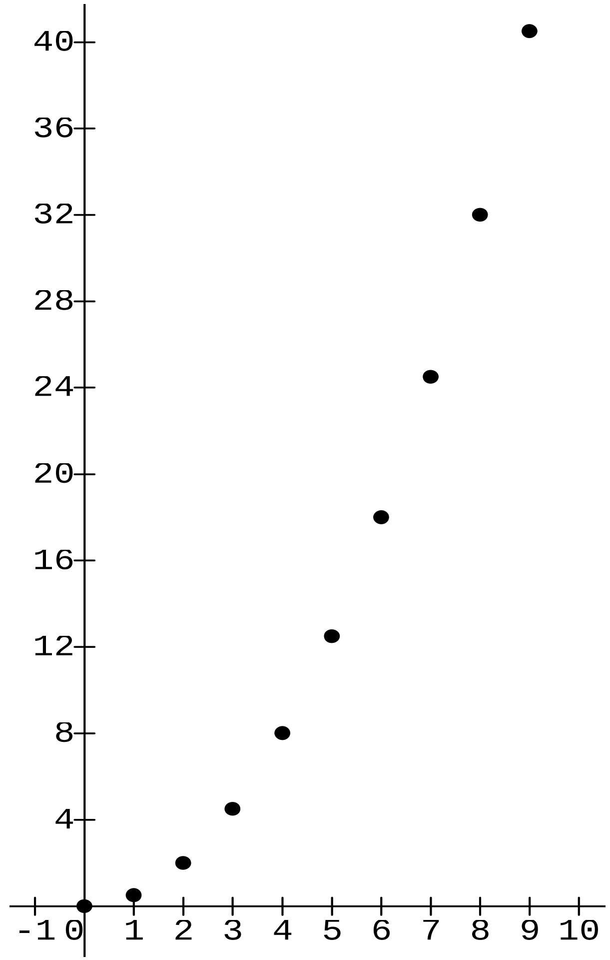
Giuseppe Peano (1858 - 1932)

Mathématicien et philosophe italien, il est l'un des premiers à avoir compris l'importance de fonder les mathématiques sur quelques axiomes précis, et d'en déduire ensuite théorèmes... Il vit aussi l'importance des symboles issus de la logique et de la théorie des ensembles pour donner une exposition formelle, claire et unifiée des mathématiques.

I. Limite d'une suite

Nous étudions le comportement de la suite lorsque n tend vers $+\infty$.

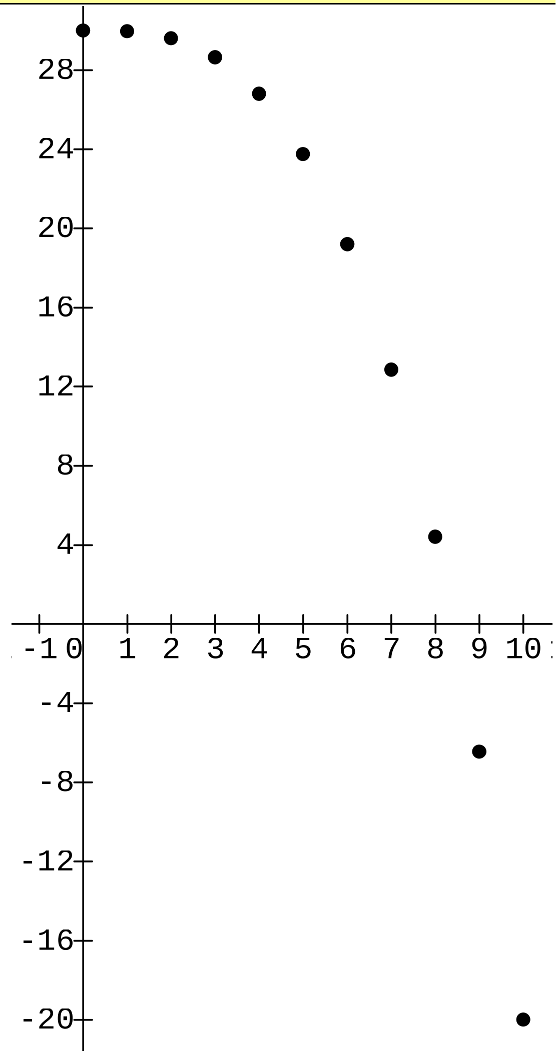


Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On note $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

lorsque $\forall A \in \mathbb{R}\,,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geq N \Rightarrow u_n \in\ ]A;+\infty[$

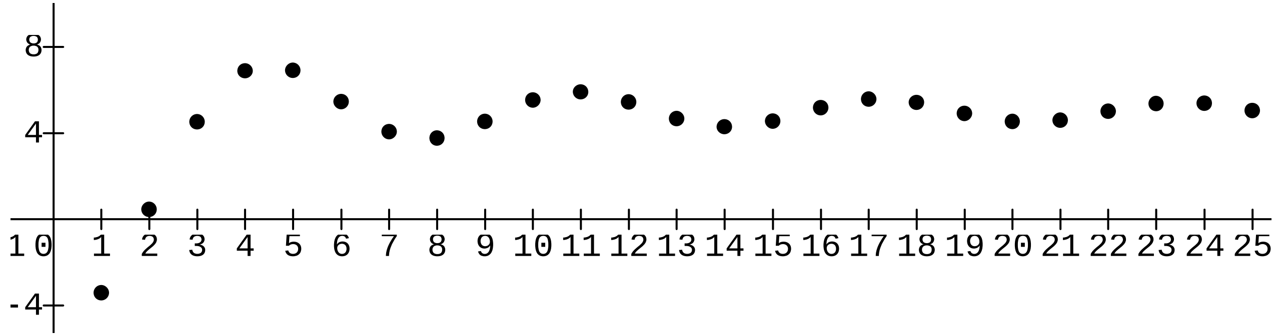


Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On note $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

lorsque $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geq N \Rightarrow u_n \in\ ]-\infty; A[$



Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite le nombre réel L quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On note $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L}$

lorsque $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geq N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon$

Exemples.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \cdots$$

$$\lim_{n \to +\infty} -n^3 = \cdots$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 = \cdots$$

$$\lim_{n \to +\infty} 3n - 1 = \cdots$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n^2} = \cdots$$

$$\lim_{n \to +\infty} -2n + 5 = \cdots$$

$$\lim_{n \to +\infty} 3 - \frac{1}{2\sqrt{n}} = \cdots$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-5}{n^3} + 1 = \cdots$$

$$\lim_{n \to +\infty} 4\sqrt{n} - 5 = \cdots$$

Définition

On dit qu'une suite **diverge** lorsqu'elle n'a pas de limite ou qu'elle a une limite infinie.

On dit qu'une suite **converge** lorsqu'elle a une limite finie.

Exemple.

La suite $(-1)^n$ est-elle convergente ?

II. Opérations et limites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, $L, L' \in \mathbb{R}$

Somme de suites.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n + v_n]$						

II. Opérations et limites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, $L, L' \in \mathbb{R}$

Somme de suites.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n + v_n]$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Exemples :

Dans les cas de FI (Forme Indéterminée) il faut étudier au cas par cas :

1. $u_n = n$ et $v_n = -n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} [u_n + v_n] = \cdots$
2. $u_n = n$ et $v_n = -2n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} [u_n + v_n] = \cdots$
3. $u_n = 2n$ et $v_n = -n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} [u_n + v_n] = \cdots$
4. $u_n = n + 5$ et $v_n = -n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} [u_n + v_n] = \cdots$

Produit de suites.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n \times v_n]$				

Produit de suites.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n \times v_n]$	$L \times L'$	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes	FI	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes

Exemples :

Dans les cas de FI (Forme Indéterminée) il faut étudier au cas par cas :

1. $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n}$, $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} [u_n \times v_n] = \cdots$
2. $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$, $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} [u_n \times v_n] = \cdots$
3. $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$, $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} [u_n \times v_n] = \cdots$

Lycée Albert EINSTEIN

Quotient de suites avec $v_n \neq 0$ pour tout n

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	L	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$L' \neq 0$	0^+ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$						

Quotient de suites avec $v_n \neq 0$ pour tout n

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	L	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	$L' \neq 0$	0^+ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{L}{L'}$	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes	0	FI		$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes

Exemples.

$$\lim_{n\to+\infty} 3n^2 + 2n - 1 = \cdots$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2+2} = \cdots$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 - n + 3 = \cdots$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+5} = \cdots$$

III. Comparaison de suites

Propriété : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites

Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Remarque : De la même façon, si, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration (ROC)

Propriété

Si une suite est croissante et admet pour limite le nombre réel l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l.

Démonstration (ROC)

Théorème des gendarmes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites

Si à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$

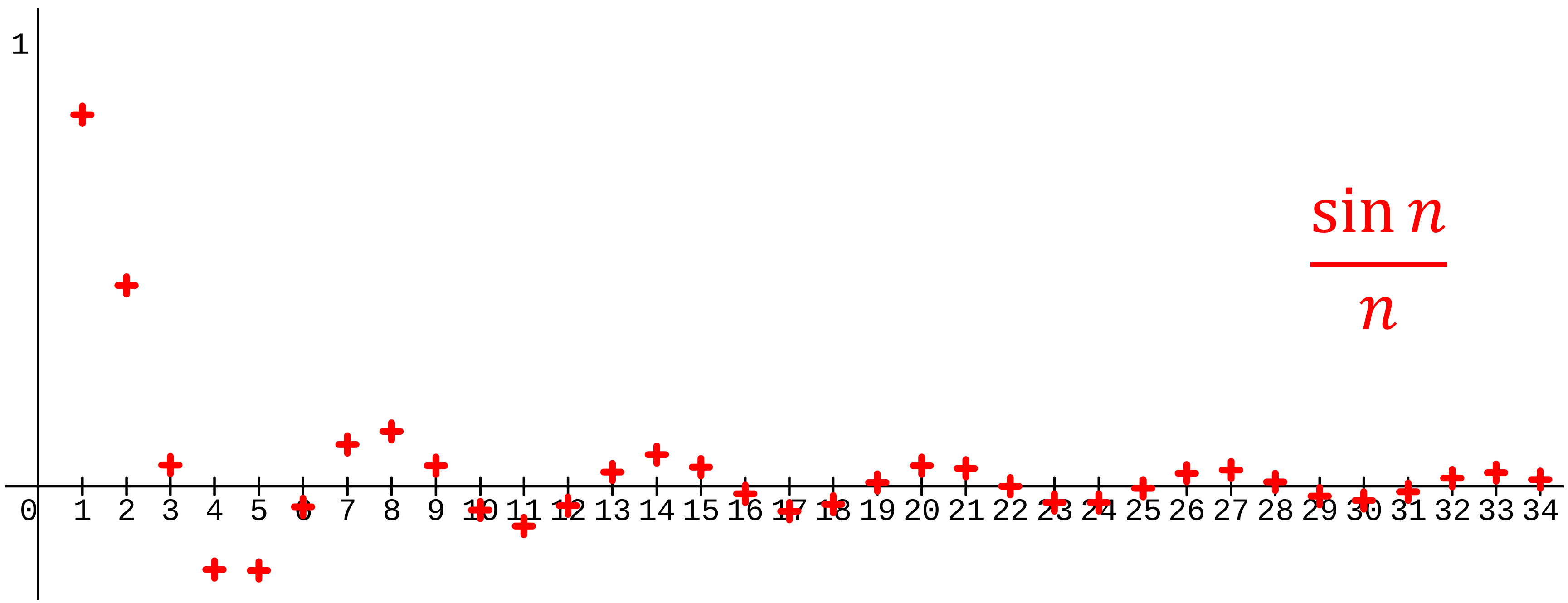
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Exemple :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?


1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34
$\frac{\sin n}{n}$

Jean Dieudonné **(1906 – 1992)**

« Majorer et minorer sont des activités essentielles aux mathématiques »

Mathématicien français, il intègre l'École normale supérieure à l'âge de 18 ans. Il est reçu *cacique* à l'agrégation en 1927. Ses travaux concernent d'importants domaines de la topologie et de l'algèbre : espace paracompact et partition de l'unité, théorie des distributions, théorie de Galois des anneaux artiniens, théorie des groupes classiques sur un corps quelconque, Groupes de Lie.

IV. Raisonnement par récurrence

Axiome de récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui dépend de l'entier naturel n

Si la propriété $\mathcal{P}(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

- **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie
- **Hérédité :** $\mathcal{P}(n)$ vraie implique $\mathcal{P}(n+1)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $2^n > 2n$.

V. Limite de la suite (q^n)

Lemme : inégalité de Bernoulli

Soit a un nombre réel strictement positif
pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1+na$.

Démonstration (ROC)

Propriété : limite de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $q \in \mathbb{R}$,

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors la suite est constante égale à 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$ alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite

Démonstration du 1[er] **cas $q > 1$ (ROC) :**

Rappel

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** de raison q lorsque :
  $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (formule de récurrence)

$$u_0 \overset{\times q}{\mapsto} u_1 \overset{\times q}{\mapsto} u_2 \overset{\times q}{\mapsto} u_3 \quad \dots \quad \overset{\times q}{\mapsto} u_n \overset{\times q}{\mapsto} u_{n+1}$$

alors :

- $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n} = u_1 \times q^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (formule explicite)
- Si $q \neq 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

VI. Suites majorées, minorées, bornées.

Définition

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$. M est alors un majorant.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$. m est alors un minorant.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples

Les suites suivantes sont-elles majorées et/ou minorées ?

$u_n = 2 - \frac{3}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$v_n = (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Lemme

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Démonstration (ROC) :

Théorème de convergence (admis)

Si une suite est croissante et majorée alors elle converge.

Si une suite est décroissante et minorée alors elle converge.

Exemple : une suite arithmético-géométrique

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 3 + 0{,}5u_n$.

Représenter graphiquement cette suite, puis démontrer qu'elle converge. En utilisant la suite auxiliaire $v_n = u_n - 6$, déterminer une expression de u_n en fonction de n.