I. Des formules pour résoudre algébriquement les équations de degré trois :

a) Une équation dont une solution particulière est connue :

Résoudre chacune des deux équations (E_1) et (E_2) en recherchant une solution particulière simple :

$$(E_1) : x^3 + 2x + 3 = 0 \qquad \text{et} \qquad (E_2) : x^3 - 5x - 2 = 0$$

b) Recherche de formules :

Les mathématiciens arabes des XIe et XIIe siècles ont essayé de résoudre *par la géométrie* des équations du troisième degré, ils faisaient apparaître les solutions de ces équations en étudiant l'intersection de courbes appelées coniques, dont vous connais-

sez les paraboles et les hyperboles. Ils ont buté sur la résolution algébrique.

En occident, jusqu'au XVIe siècle, les efforts de résolution n'aboutiront pas vraiment.

Cependant, les mathématiciens italiens de la Renaissance vont se risquer à « percer le mystère et les secrets du troisième degré ».

Une longue histoire va commencer, avec des mathématiciens comme Nicolo Tartaglia (1500-1557), Girolamo Cardano (Jérôme Cardan) (1501-1576), et Rafaele Bombelli (1526-1573).

1° Forme générale pour la résolution d'une équation de degré 3 :

La mode était à l'époque aux défis et tournois mathématiques. Cela permettait d'arrondir ses fins de mois et d'acquérir la célébrité. Répondant à l'un de ces défis, en 1535, Tartaglia réussit à résoudre quelques équations de degré 3. Dans des circonstances un peu scabreuses, Cardan réussit à soutirer sa découverte à Tartaglia, lui promettant de la garder secrète. En fait, Cardan ne tardera pas à publier cette résolution, après toutefois l'avoir largement enrichie, en donnant une étude complète des équations de degré 3, dans Ars Magna, en 1545.

Il propose de classer les équations de degré 3 en trois catégories que nous donnons dans l'écriture algébrique contemporaine :

a) : $x^3 + cx = d$ *b)* : $x^3 + d = cx$ *c)* : $x^3 = cx + d$

Rappelons que non seulement l'écriture algébrique d'une équation n'était pas connue, mais aussi que les nombres négatifs n'étaient pas de *vrais nombres* ; par ailleurs « = 0 » n'avait pas de sens.

2° Résolution d'équation et formules de Tartaglia-Cardan :

Dans le cas général, il est possible d'établir qu'une équation (E) du type : $x^3 + px + q = 0\ (E)$ admet une solution de la forme :

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}-\frac{q}{2}}$$

si, bien sûr, le nombre $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} \geq 0$

Cette formule est appelée formule de Tartaglia-Cardan.

Cardan a remarqué que pour ses cas (I) et (II), il peut y avoir 0 ou 1 solution, et sa *formule* permet alors de la trouver. Dans le cas (III), il peut y avoir 3 solutions, or, juste dans ce cas, sa formule ne peut s'appliquer, car

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} < 0.$$

Exemples :

a) Soit (E_4) : $x^3 + 6x = 20$, à l'aide de la formule de Cardan déterminer une solution. Cette solution vous semblera très compliquée. Vous pourrez l'écrire plus simplement en vous aidant du développement de $\left(1+\sqrt{3}\right)^3$ et $\left(1-\sqrt{3}\right)^3$. Nous avons ainsi une solution. Achever alors la résolution.

b) Soit (E_5) : $x^3 = 32x + 24$, vérifier que $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, la formule de Tartaglia-Cardan ne peut s'appliquer. Vérifier cependant que 6 est racine et achever la résolution.

II. Où l'on ose l'impensable :

Ce cas où les formules de Tartaglia Cardan ne peuvent s'appliquer, alors qu'il existe des solutions, va s'appeler rapidement le cas **irréductible**.
Cependant Cardan, puis surtout Bombelli vont essayer de forcer le destin.
Et si l'on décidait d'écrire qu'un nombre négatif, dans certaines circonstances particulières, pouvait être considéré comme le carré de quelque chose ?

Après beaucoup de tâtonnements, considérés par Cardan comme des *tortures mentales*, Bombelli va décider d'appliquer les formules à la résolution de l'équation : $x^3 = 15x + 4$.
On pourra vérifier que la solution donnée par les formules de Tartaglia Cardan devrait s'écrire :

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \quad \text{ou encore}$$

$$x = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$$

Bombelli calcule alors $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$ en remplaçant a par 2 et b par $\sqrt{-1}$, où $\sqrt{-1}$ désigne quelque chose dont le carré est -1.

Quelle est la solution trouvée par Bombelli ?

Il a ainsi imaginé une chose qui n'est ni un nombre positif, ni un nombre négatif, mais dont le carré vaut -1, et qui est très utile pour trouver les solutions réelles d'une équation. Il nomme cette chose *plus de moins*. Nous la noterons provisoirement $\sqrt{-1}$.

Ainsi : $\boxed{\left(\sqrt{-\mathbf{1}}\right)^{\mathbf{2}} = -\mathbf{1}}$.

Peu à peu, ces nouvelles choses vont être utilisées dans les calculs algébriques, et pas seulement pour résoudre les équations de degré 3. On leur trouve une foule d'utilité.
Descartes les nommera, dans sa Géométrie, en 1637, *quantités imaginaires*. D'autres continueront longtemps de les nommer *quantités impossibles*.
(Les nombres négatifs étaient aussi des quantités impossibles).

Une nouvelle notation :

Dans un texte de 1774 Euler écrit : *"Maintenant comme $-a$ signifie autant $+a$ multiplié par -1, et que la racine carrée d'un produit se trouve en multipliant ensemble les racines des facteurs, il s'ensuit que la racine de a multiplié par -1, ou $\sqrt{-a}$ est autant que $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{-1}$. Or $\sqrt{a}$ est un nombre possible ou réel, par conséquent ce qu'il y a d'impossible dans une quantité imaginaire peut toujours se réduire à $\sqrt{-1}$. (…) De plus comme $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{b}$ fait $\sqrt{ab}$, l'on aura $\sqrt{6}$ pour la valeur de $\sqrt{-2}$ multiplié par $\sqrt{-3}$."*

Que vaut $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$. ***Est-ce compatible ?***

Euler prendra conscience de cette difficulté. Aussi décidera-t-il de représenter la quantité $\sqrt{-1}$ dont le carré vaut -1 par le symbole i (début de imaginaire ou d'impossible), donc $\boxed{\boldsymbol{i^2 = -1}}$. Cette notation sera reprise par Gauss en 1831 mais aura du mal à s'imposer. Cependant à partir de Gauss, et pour vous en particulier, le symbole $\sqrt{\quad}$ devra être réservé aux nombres réels positifs et aura comme seule définition : si a est un réel positif, on note $\sqrt{a}$ le réel positif qui, élevé au carré, donne a.

Application : en utilisant le symbole i, écrire les nombres dont le carré est -25; puis dont le carré est -2.

Les nombres complexes :

En 1831, Gauss donnera le nom de ***nombres complexes*** à ces quantités considérées jusqu’ici comme imaginaires. Dans l'ensemble des nombres complexes, l'addition et la multiplication doivent prolonger les opérations de $\mathbb{R}$ et avoir les mêmes propriétés : commutativité, associativité, distributivité. Il y a seulement la propriété supplémentaire de l'existence de i dont le carré vaut -1.