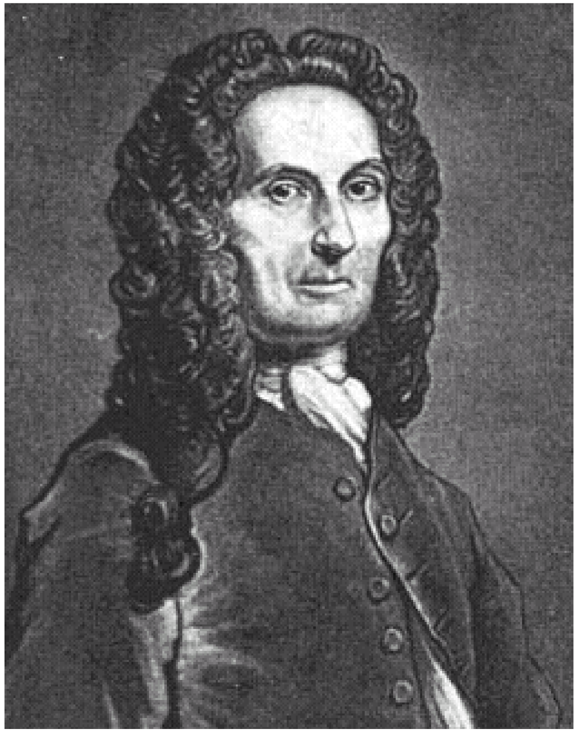
Abraham de Moivre (1667-1754)



Mathématicien surtout connu pour l'introduction des quantités imaginaires dans le calcul trigonométrique. Il s'intéressa également au calcul des probabilités : il énonça la règle des probabilités composées et un théorème « limite », montrant que la loi normale est une bonne approximation de la loi binomiale ; il étudia la théorie des séries récurrentes et employa la méthode des équations aux différences finies.

I. Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition

On admet l'existence d'un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possèdent les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- l'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes avec les mêmes règles de calcul
- il existe un nombre complexe noté i tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Définition :

La notation $z = \boldsymbol{x + iy}$ s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe z.
Le nombre réel x est appelé la **partie réelle** de z notée $\mathcal{R}e(z)$
Le nombre réel y est la **partie imaginaire** de z notée $\mathcal{I}m(z)$.

Exemples :

$3 - 4i$ $\quad$ $7i$ $\quad$ 3 $\quad$ $\sqrt{2} + i$

Vocabulaire :

Lorsque $y = 0$, $z = x$ est un nombre réel
Lorsque $x = 0$, $z = \boldsymbol{iy}$ est un **imaginaire pur**

Propriétés :

❶ Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

❷ Tout nombre complexe admet un opposé.

❸ Tout nombre complexe non nul admet un inverse.

Exemple :

On pose $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 5 - 4i$

Mettre sous forme algébrique

$$z_1 + z_2 = \cdots \qquad z_1 - z_2 = \cdots$$

$$z_1 \times z_2 = \cdots \qquad z_1^2 = \cdots$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \cdots \qquad \frac{z_1}{4 + 7i} = \cdots$$

II. Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, l'équation $z^2 = a$ possèdent deux solutions dans $\mathbb{C}$.

- si $a > 0$ alors les solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- si $a < 0$ alors les solutions sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$,

Théorème :

L'équation $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ admet dans $\mathbb{C}$:

- si $\Delta = 0$, une unique solution $z = \dfrac{-b}{2a}$
- si $\Delta \neq 0$, deux solutions
  - réelles si $\Delta > 0$, $\boldsymbol{z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boldsymbol{z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$
  - complexes conjuguées si $\Delta < 0$, $\boldsymbol{z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$ et $\boldsymbol{z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$

Remarque :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)}$.

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$

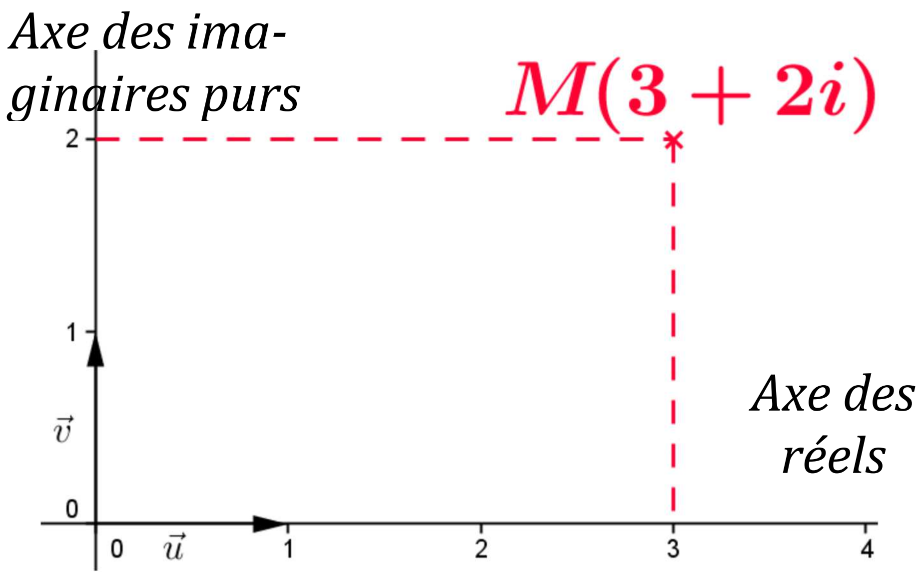
III. Le plan complexe

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Définition : Affixe d'un point

- A tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées $(x\,;y)$ appelé **image** de z ;

- A tout point M de coordonnées $(x\,;y)$ est associé le nombre complexe $z = x + iy$ appelé **affixe du point** M.



Définition : Affixe d'un vecteur

- A tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le vecteur du plan $\vec{v}$ de coordonnées $(x\,;y)$;
- A tout vecteur du plan $\vec{v}$ de coordonnées $(x\,;y)$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ appelé **affixe du vecteur** $\vec{v}$.

Théorème

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$

- le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $\boldsymbol{z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}}$;
- le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour affixe $\boldsymbol{z_{\lambda\vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}}$.

Théorème

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B :

① le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$;

② le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $\boldsymbol{z_I = \frac{z_A + z_B}{2}}$.

Exemple

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -1 + i$, $z_c = 1 - i$ et $z_D = 5$.

Que peut-on dire du quadrilatère $ABCD$?

IV. Conjugué d'un nombre complexe

Définition

On appelle conjugué du nombre complexe $z = x + iy$, le nombre complexe noté $\bar{z} = x - iy$.

Remarque : Les points M et M' d'affixe z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriétés :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\boldsymbol{\bar{\bar{z}} = z}$; $\boldsymbol{z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z)}$; $\boldsymbol{z - \bar{z} = 2i\mathcal{I}m(z)}$

Si $z \in \mathbb{R}$ alors $\bar{z} = z$ et si z est imaginaire pur alors $\bar{z} = -z$.

Propriétés :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$$

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \text{ si } z \neq 0$$

$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\bar{z}} \text{ si } z \neq 0$$

V. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Le plan étant rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Définition :

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

On appelle **module** de z et on note $|z|$ le réel positif défini par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Remarque :

Dans le plan complexe, si M est le point d'affixe z alors

$$|z| = OM$$

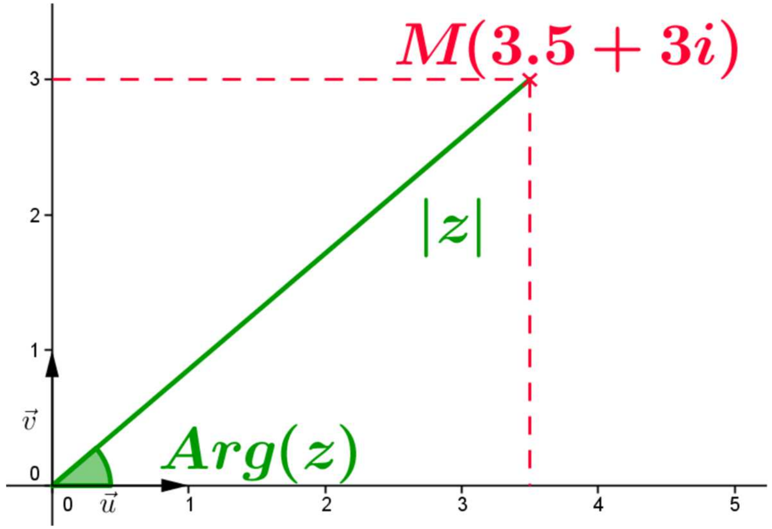
Propriété : $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad |z|^2 = z \times \bar{z}$

Définition :

On appelle **argument** de $z \neq 0$ noté $\mathbf{arg}(\boldsymbol{z})$ une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$.

Soit θ un argument de z, les autres arguments de z sont de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc

$$\arg(\boldsymbol{z}) = \theta\ [\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$$



Définition :

La notation $\boldsymbol{z} = |\boldsymbol{z}|(\mathbf{cos}\,\theta + \boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\,\theta)$ où $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$ s'appelle la **forme trigonométrique** du nombre complexe z.

Méthode : On détermine l'argument en calculant son cosinus et son sinus :

$$\begin{cases} \cos(\arg \boldsymbol{z}) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{z}|} = \dfrac{\text{partie réelle}}{\text{module}} \\ \sin(\arg \boldsymbol{z}) = \dfrac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{z}|} = \dfrac{\text{partie imaginaire}}{\text{module}} \end{cases}$$

Exemples :

① Soit le nombre $z_1 = -2 + 2i$ donné sous forme algébrique, donner sa forme trigonométrique.

② Soit le nombre z_2 tel que $|z_2| = 2$ et $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{6}$, donner sa forme algébrique.

Propriétés :

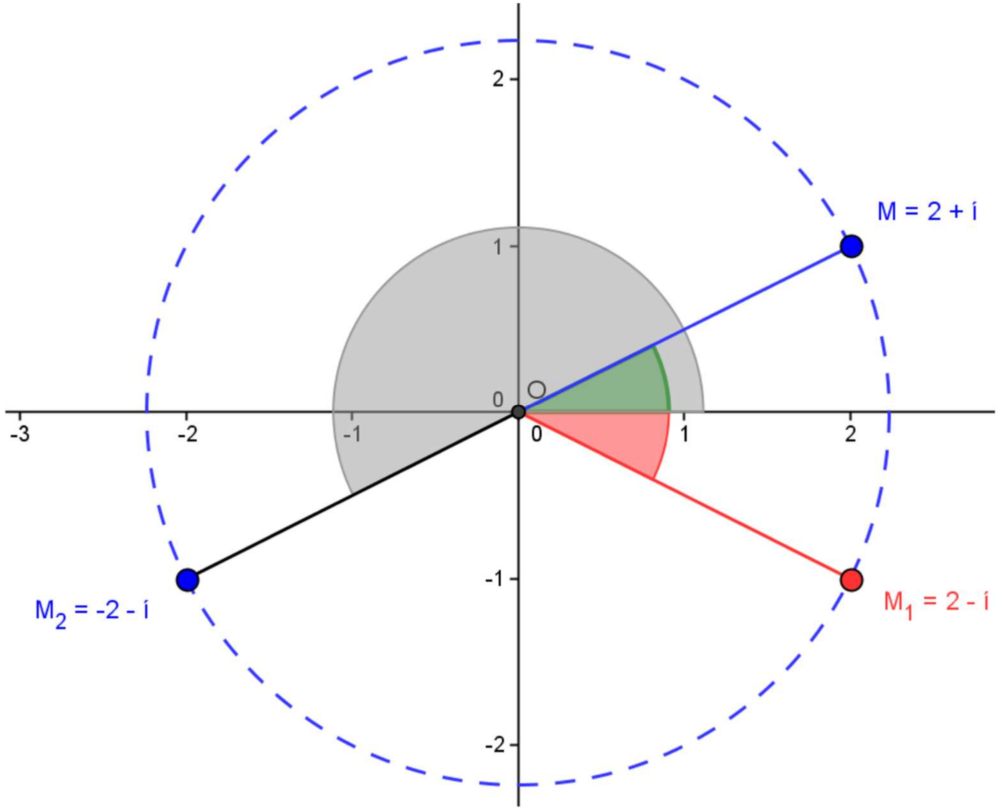
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$

$|-z| = |z|$

et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \; [2\pi]$

$|\bar{z}| = |z|$

et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \; [2\pi]$



Propriétés :

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$

❶ $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\arg(z) = 0 \; [\pi]$

❷ z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \; [\pi]$