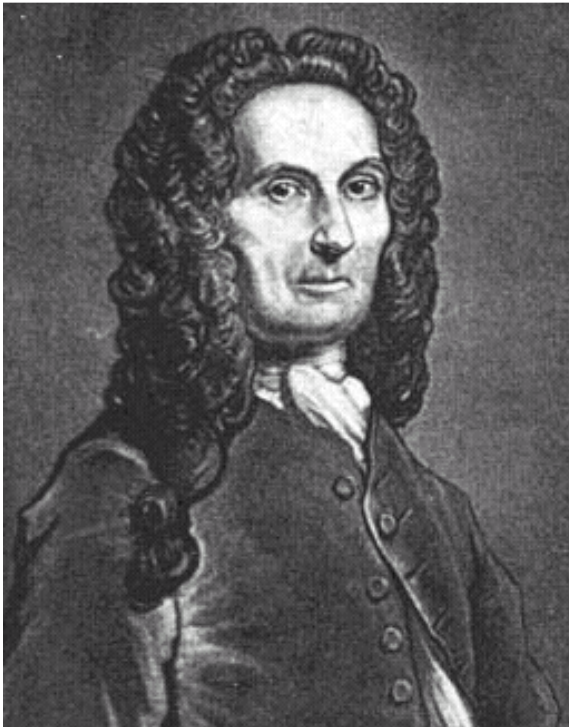


## Abraham de Moivre (1667-1754)



Mathématicien surtout connu pour l'introduction des quantités imaginaires dans le calcul trigonométrique. Il s'intéressa également au calcul des probabilités : il énonça la règle des probabilités composées et un théorème « limite », montrant que la loi normale est une bonne approximation de la loi binomiale ; il étudia la théorie des séries récurrentes et employa la méthode des équations aux différences finies.

### I. Forme algébrique d'un nombre complexe

#### Définition

On admet l'existence d'un ensemble noté  $\mathbb{C}$ , appelé **ensemble des nombres complexes** qui possèdent les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- l'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes avec les mêmes règles de calcul
- il existe un nombre complexe noté  $i$  tel que  $i^2 = -1$
- tout nombre complexe  $z$  s'écrit de manière unique  $z = x + iy$  où  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

### Définition :

La notation  $z = x + iy$  s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe  $z$ .

Le nombre réel  $x$  est appelé la **partie réelle** de  $z$  notée  $\mathcal{R}e(z)$

Le nombre réel  $y$  est la **partie imaginaire** de  $z$  notée  $\mathcal{I}m(z)$ .

### Exemples :

$$3 - 4i$$

$$7i$$

$$3$$

$$\sqrt{2} + i$$

### Vocabulaire :

Lorsque  $y = 0$ ,  $z = x$  est un nombre réel

Lorsque  $x = 0$ ,  $z = iy$  est un **imaginaire pur**

### Propriétés :

- ❶ Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
- ❷ Tout nombre complexe admet un opposé.
- ❸ Tout nombre complexe non nul admet un inverse.

### Exemple :

On pose  $z_1 = 3 + 2i$  et  $z_2 = 5 - 4i$

Mettre sous forme algébrique

$$z_1 + z_2 = \dots$$

$$z_1 - z_2 = \dots$$

$$z_1 \times z_2 = \dots$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \dots$$

## II. Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

Propriété :

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ , l'équation  $z^2 = a$  possèdent deux solutions dans  $\mathbb{C}$ .

- si  $a > 0$  alors les solutions sont  $\sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$ .
- si  $a < 0$  alors les solutions sont  $i\sqrt{-a}$  et  $-i\sqrt{-a}$ .

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$ ,

**Théorème :**

L'équation  $az^2 + bz + c = 0$ , de discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  admet dans  $\mathbb{C}$  :

- si  $\Delta = 0$ , une unique solution  $z = \frac{-b}{2a}$

- si  $\Delta \neq 0$ , deux solutions

- réelles si  $\Delta > 0$ ,  $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- complexes conjuguées si  $\Delta < 0$ ,  $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Remarque :

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ .

Exemple :

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$

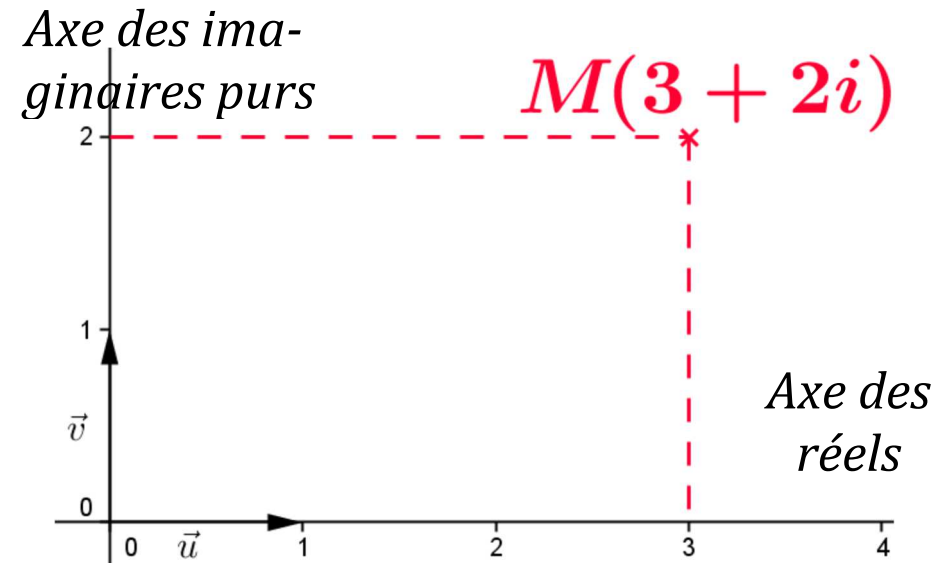


### III. Le plan complexe

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

#### Définition : Affixe d'un point

- A tout nombre complexe  $z = x + iy$ , on associe le point  $M$  de coordonnées  $(x ; y)$  appelé **image** de  $z$  ;
- A tout point  $M$  de coordonnées  $(x ; y)$  est associé le nombre complexe  $z = x + iy$  appelé **affixe du point**  $M$ .



### Définition : Affixe d'un vecteur

- A tout nombre complexe  $z = x + iy$ , on associe le vecteur du plan  $\vec{v}$  de coordonnées  $(x ; y)$ ;
- A tout vecteur du plan  $\vec{v}$  de coordonnées  $(x ; y)$ , on associe le nombre complexe  $z = x + iy$  appelé **affixe du vecteur**  $\vec{v}$ .

### Théorème

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs d'affixe respective  $z_{\vec{u}}$  et  $z_{\vec{v}}$

- le vecteur somme  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour affixe  **$z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$**  ;
- le vecteur  $\lambda\vec{u}$  a pour affixe  **$z_{\lambda\vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$** .

### Théorème

Soit  $A$  et  $B$  deux points d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$  :

① le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour affixe  $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$  ;

② le milieu  $I$  de  $[AB]$  a pour affixe  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ .

### Exemple

On considère les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'affixes respectives :  $z_A = 3 + 2i$ ,  $z_B = -1 + i$ ,  $z_C = 1 - i$  et  $z_D = 5$ .

Que peut-on dire du quadrilatère  $ABCD$  ?

### IV. Conjugué d'un nombre complexe

#### Définition

On appelle conjugué du nombre complexe  $z = x + iy$ , le nombre complexe noté  $\bar{z} = x - iy$ .

**Remarque :** Les points  $M$  et  $M'$  d'affixe  $z$  et  $\bar{z}$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

#### Propriétés :

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :  $\overline{\bar{z}} = z$  ;  $z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z)$  ;  $z - \bar{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$

Si  $z \in \mathbb{R}$  alors  $\bar{z} = z$  et si  $z$  est imaginaire pur alors  $\bar{z} = -z$ .

### Propriétés :

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et  $z' \in \mathbb{C}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad \text{si } z \neq 0$$

$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}} \quad \text{si } z \neq 0$$

### V. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Le plan étant rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

**Définition :**

Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,

On appelle **module** de  $z$  et on note  $|z|$  le réel positif défini par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Remarque :**

Dans le plan complexe, si  $M$  est le point d'affixe  $z$  alors

$$|z| = OM$$

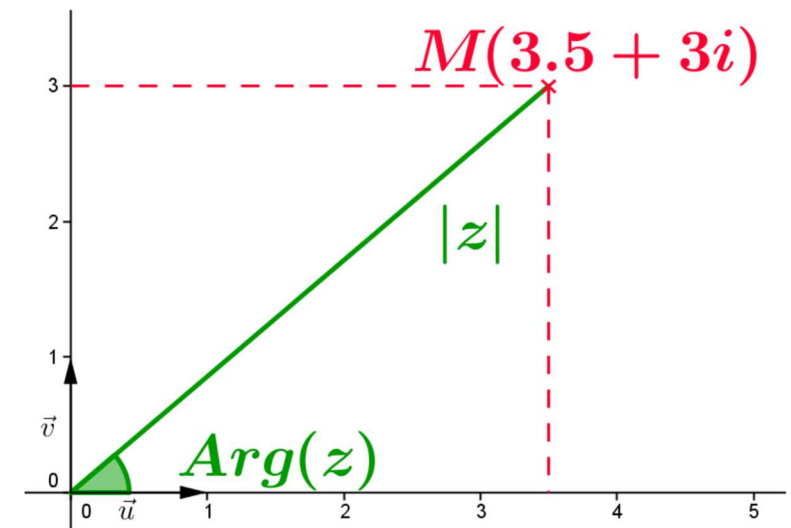
**Propriété :**  $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z|^2 = z \times \bar{z}$

### Définition :

On appelle **argument** de  $z \neq 0$  noté  **$\arg(z)$**  une mesure en radian de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ .

Soit  $\theta$  un argument de  $z$ , les autres arguments de  $z$  sont de la forme  $\theta + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , donc

$$\arg(z) = \theta [2\pi]$$



### Définition :

La notation  **$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$**  où  $\arg(z) = \theta [2\pi]$  s'appelle la **forme trigonométrique** du nombre complexe  $z$ .



**Méthode : On détermine l'argument en calculant son cosinus et son sinus :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos (\arg z) = \frac{x}{|z|} = \frac{\text{partie réelle}}{\text{module}} \\ \sin (\arg z) = \frac{y}{|z|} = \frac{\text{partie imaginaire}}{\text{module}} \end{array} \right.$$

**Exemples :**

① Soit le nombre  $z_1 = -2 + 2i$  donné sous forme algébrique, donner sa forme trigonométrique.

② Soit le nombre  $z_2$  tel que  $|z_2| = 2$  et  $\arg (z_2) = -\frac{\pi}{6}$ , donner sa forme algébrique.

### Propriétés :

Pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$

$$|-z| = |z|$$

$$\text{et } \arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$\text{et } \arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$$

### Propriétés :

Pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$

❶  $z \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $\arg(z) = 0 [\pi]$

❷  $z$  est un imaginaire pur si et seulement si  $\arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$

