Karl Weierstrass (1815-1897)

Mathématicien allemand, il est souvent cité comme le « père de l'analyse moderne ». Il travailla sur les nombres irrationnels et les fonctions elliptiques. C'est lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable.

I. Limite infinie à l'infini

Soit une fonction f définie sur un intervalle I,

Définition

On dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ lorsque $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I\ \ x \geq M \Rightarrow f(x) > A$

Ecrire les définitions de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

puis $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exemples.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = \cdots$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2 + 3\sqrt{x} = \cdots$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x) = \cdots$$

$$\lim_{x \to -\infty} 3 - 2x = \cdots$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = \cdots$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \cdots$

II. Limite finie à l'infini

Définition

On dit que la fonction f a pour limite le nombre réel L quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

lorsque $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in I \ \ x \geq M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Ecrire la définition de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$.

Exemples.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \cdots$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \cdots$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^3} - 1 = \cdots$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \cdots$$

Interprétation graphique

On dit que la courbe représentative C de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$ lorsque

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Cela signifie que si $M\big(x; f(x)\big)$ est un point de C et $P(x; L)$ est un point de la droite d'équation $y = L$ alors la distance MP tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

III. Limite infinie en un nombre réel a

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$

Définition

On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a lorsque tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a.

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

lorsque $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I\ \ |x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) > A$

Ecrire la définition de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemples.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = \cdots$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = \cdots$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{1}{1-x} = \cdots$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \cdots$$

Interprétation graphique

On dit que la courbe représentative C de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ lorsque

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

IV. Opérations et limites

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I,
a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et $L, L' \in \mathbb{R}$

Somme de fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$						

IV. Opérations et limites

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I,
a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et $L, L' \in \mathbb{R}$

Somme de fonctions.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)]$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Produit de fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\times g(x)]$				

Produit de fonctions.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} g(x)$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \times g(x)]$	$L \times L'$	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes	FI	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes

Quotient de fonctions avec $g(x) \neq 0$ pour tout x

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	L	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$L' \neq 0$	0^+ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'
alors $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$						

Quotient de fonctions avec $g(x) \neq 0$ pour tout x

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	L	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L' \neq 0$	0^+ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'
alors $\lim\limits_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$	$\frac{L}{L'}$	$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes	0	FI		$+\infty$ ou $-\infty$ selon la règle des signes

Exemples.

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 - 5x + 1 = \cdots$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - 5x + 1 = \cdots$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \cdots$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \frac{2x+1}{x-3} = \cdots$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \cdots$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \cdots$$

Composition de fonctions

Soit f et g deux fonctions,

a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$

$$x \overset{f}{\mapsto} f(x) \overset{g}{\mapsto} g[f(x)] = g \circ f(x)$$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{t \to b} g(t) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g\big(f(x)\big) = c$

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\pi - \frac{2}{x}\right)$

V. Comparaison de fonctions

Soit f, g et h des fonctions définies sur un intervalle I, a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et $L \in \mathbb{R}$

Propriété :

① Si pour x voisin de a, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

② Si pour x voisin de a, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$

Théorème des gendarmes

Si pour x voisin de a, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$

alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Exemple :

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin x - 2x$
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

VI. Continuité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

Définition :

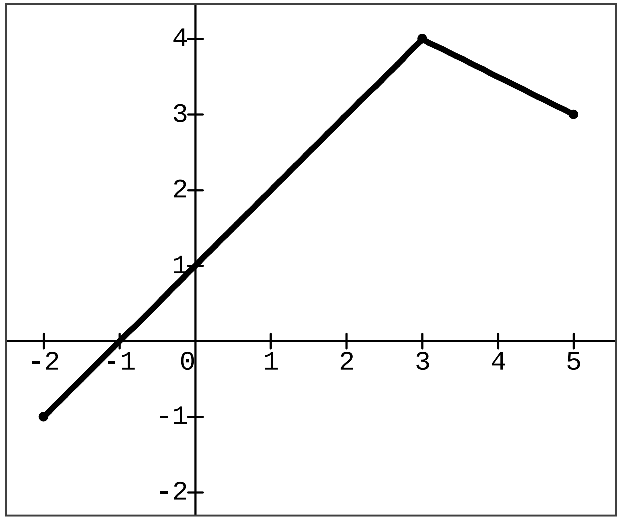
La fonction $\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{a}$ lorsque f a une limite en a égale à $f(a)$:

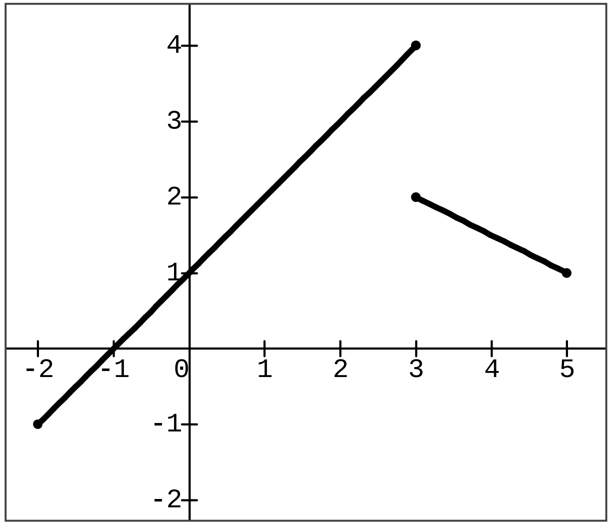
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La fonction $\boldsymbol{f}$ est continue sur l'intervalle $\boldsymbol{I}$ lorsque f est continue en tout point de I.

Interprétation graphique :

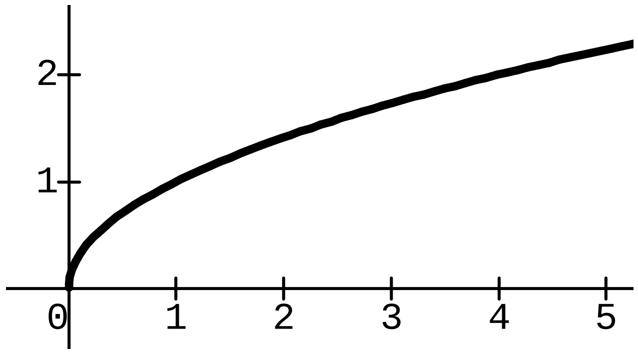
La continuité de f sur un intervalle I se traduit par le fait que la courbe représentative de f sur I peut être tracée sans lever le crayon.

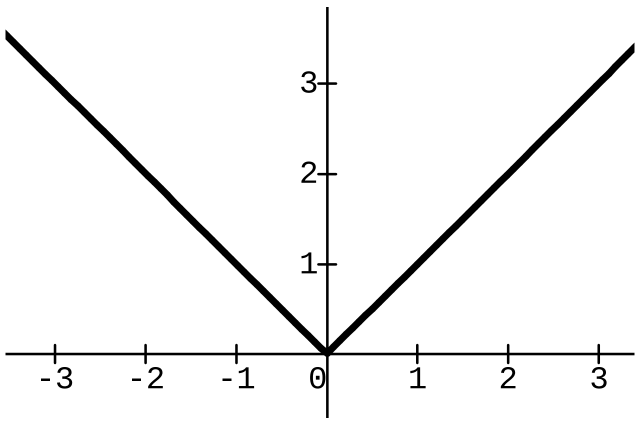




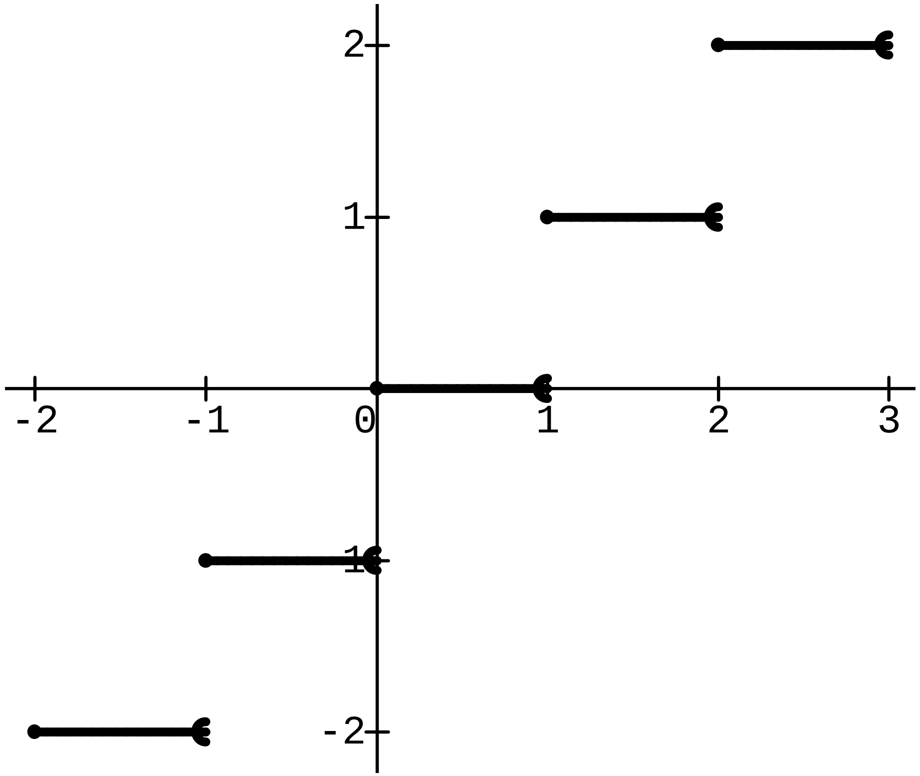
Exemples :

Les fonctions racine carrée et valeur absolue sont continues sur $[0;+\infty[$.

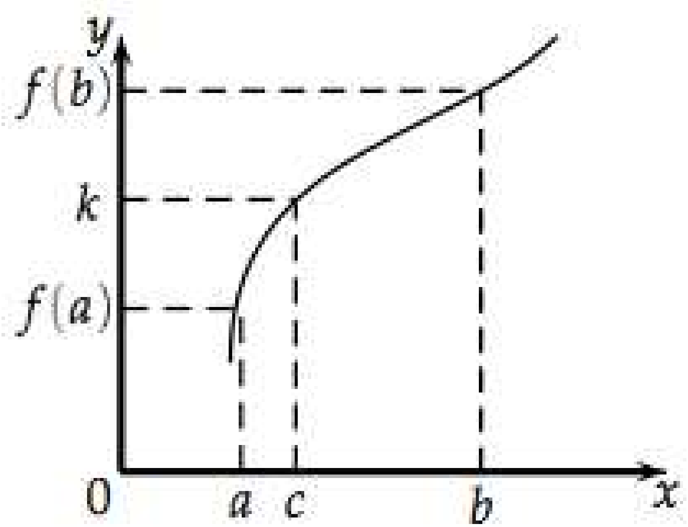




La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.



Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et soit $a \in I$ et $b \in I$



Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :

Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe au moins un nombre réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

(On admet que ce théorème reste vrai lorsqu'au moins l'une des bornes de l'intervalle est infinie)

Théorème des fonctions continues strictement monotones :

Soit f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et soit $a \in I$ et $b \in I$

Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe un unique nombre réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

(On admet que ce théorème reste vrai lorsqu'au moins l'une des bornes de l'intervalle est infinie)

VII. Calcul de dérivées

Rappel définition

Soit f définie sur I, $a \in I$ et $a+h \in I$ pour h proche de 0.

On dit que f est dérivable en $\boldsymbol{a}$ lorsque la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est finie quand h tend vers 0, cette limite est appelée nombre dérivé de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ et noté $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$.

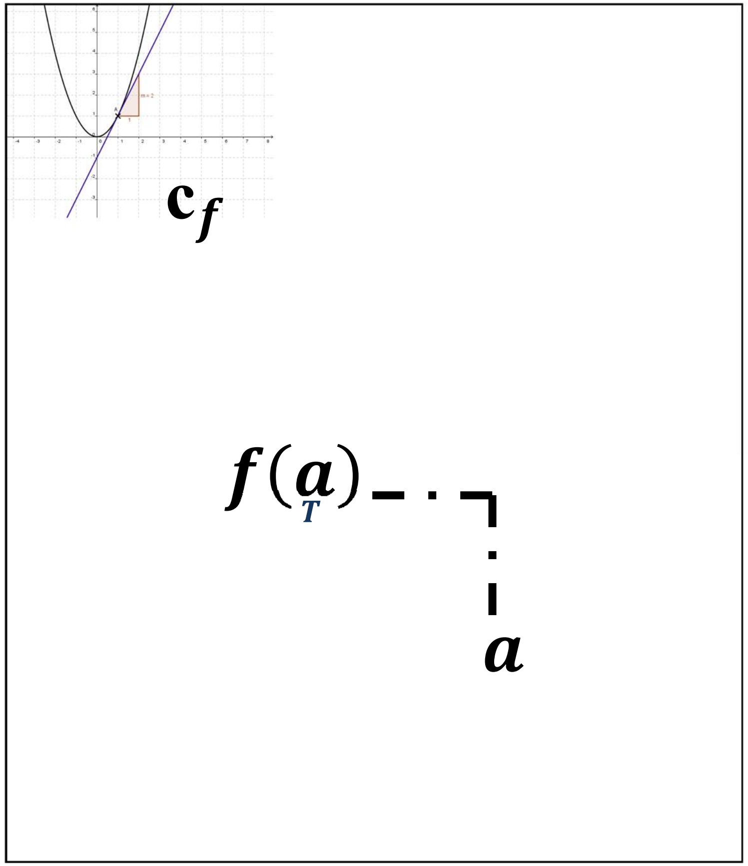
On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I.

Rappel interprétation graphique :

Soit c_f la courbe de f.

Soit $A \in c_f$ tel que $A\big(a; f(a)\big)$

Si f est dérivable en a alors $\boldsymbol{f'(a)}$ est le **coefficient directeur de la tangente** à c_f au point A.



L'équation de la tangente à c_f au point A est :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Rappel sur les variations d'une fonction

- Si, pour tout nombre x de I, on a $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ alors f est stricte-ment croissante sur I.
- Si, pour tout nombre x de I, on a $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ alors f est stricte-ment décroissante sur I.
- Si, pour tout nombre x de I, on a $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ alors f est cons-tante sur I.

Rappel dérivées des fonctions usuelles

Fonctions $\boldsymbol{f(x)}$	Dérivées $\boldsymbol{f'(x)}$	Ensemble de dérivabilité
a un nombre réel constant.	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n où $n \in \mathbb{N}-\{0;1\}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$]-\infty;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Rappel des règles de dérivation

u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}$$

$$(ku)' = ku'$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

Remarque : On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Propriété (admise)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I où $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ notée $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et

$$\boldsymbol{\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

Exemple :

Etudier la dérivabilité de la fonction $f(x) = \sqrt{4 - 3x}$.

Propriété (admise)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et $n \in \mathbb{Z}^*$

Si $n \geq 1$ ou $n \leq -1$ et $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors la fonction $x \mapsto \left(u(x)\right)^n$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'}$

Exemple :

Etudier la dérivabilité de la fonction $g(x) = (4 - 3x)^5$.

Propriétés :

❶ $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

❷ La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$.

Propriété :

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Propriété (admise) :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I,
soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$

La fonction $g : x \mapsto g(x) = f(ax+b)$ est dérivable sur tout intervalle J tel que pour tout $x \in J, \quad ax+b \in I$
et on a pour tout $x \in J$

$$\boldsymbol{g'(x) = \big(f(ax+b)\big)' = a \times f'(ax+b)}$$

Exemples :

Calculer les dérivées de $h(x) = \frac{1}{5x+2}$ et $g(x) = \sin(3x+4)$