Leonhard Euler (1707 - 1783)

Mathématicien et physicien suisse. Il fit d'importantes découvertes dans le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme pour la notion de fonction. La première apparition du nombre e date de 1728, dans un manuscrit d'Euler.

I. La fonction exponentielle

Lemme :

Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Propriété – définition :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. On l'appelle **fonction exponentielle** notée **exp**.

Démonstration :

L'existence est admise et démontrons l'unicité (ROC)

Bilan :

La fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\exp(x))' = \exp(x)$
- $\exp(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \neq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \times \exp(-x) = 1$ soit $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

II. Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0}$

Démonstration :

Propriété : relation fonctionnelle

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{exp}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) \times \mathbf{exp}(\boldsymbol{y})$$

i.e. l'exponentielle transforme une somme en produit.

Démonstration :

Conséquences.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{(\exp(x))^n = \exp(nx)}$$

La notation « puissance » :

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle :

$$e = \exp(1) \approx 2{,}718281\ldots$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(n) = \exp(n\times 1) = (\exp(1))^n = e^n$.

Par convention on pose $\boldsymbol{\exp(x) = e^x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

III. Etude de la fonction exponentielle

Propriété
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Conséquences :
Pour tous réels a et b, $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Propriété

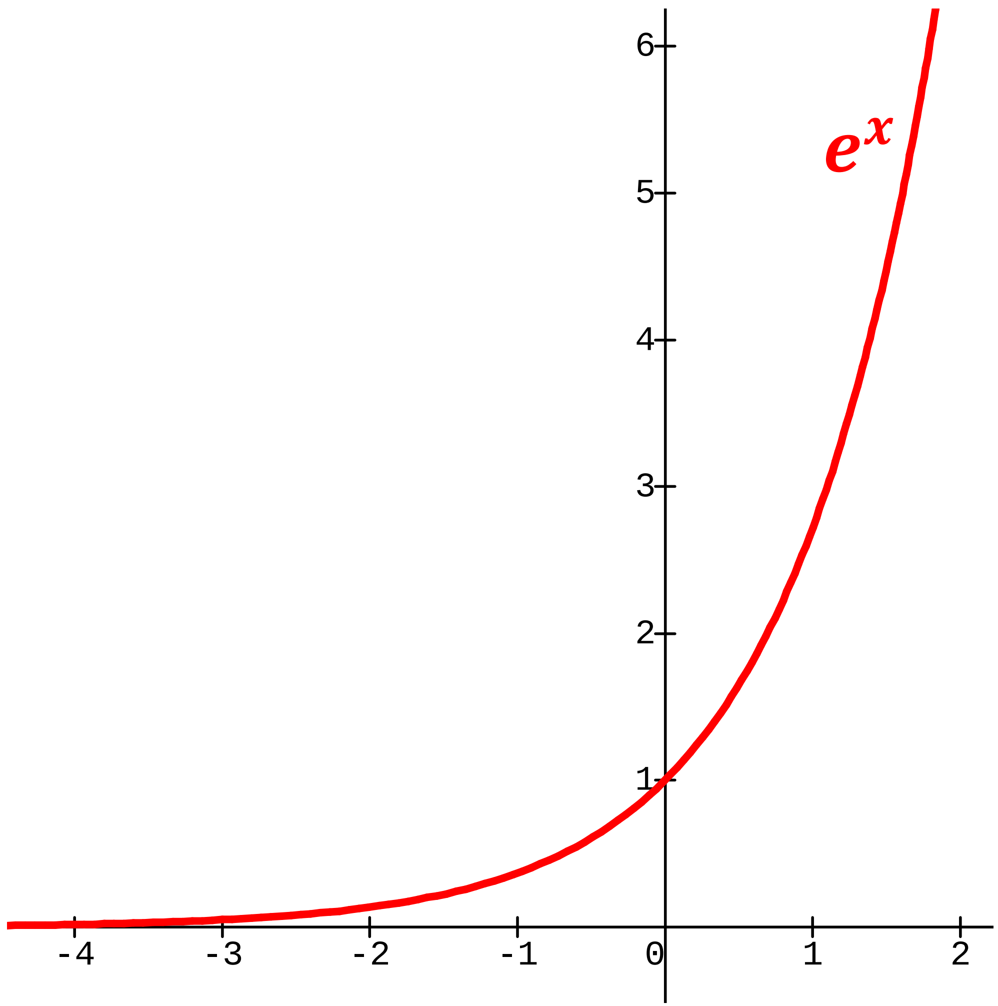
$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

La courbe de l'exponentielle admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Démonstration (ROC) :

Bilan :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(e^x)'$		$+$	
e^x	0	1	$+\infty$



IV. Fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$

Théorème.

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I alors $x \longmapsto e^{u(x)}$ est définie et dérivable sur I et

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

Exemples.

▶ 1. Soit la fonction $f(x) = e^{x^2-5x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f'(x)$.

▶ 2. Soit les fonctions $g(x) = e^{-kx}$ et $h(x) = e^{-kx^2}$ où $k > 0$ définies sur $\mathbb{R}$. Déterminer $g'(x)$ et $h'(x)$.

V. Croissances comparées

Théorème.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Démonstration :

Exemple.

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x + 7)e^x$