Lemme :

Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Soit la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(-x)$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -f'(-x) = -f(-x) = -g(x)$$

Soit la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x)f(-x)$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \ h'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$

$$h'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$$

donc h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$

or $f(0) = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \ h(x) = h(0) = f(0)f(-0) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x)f(-x) = 1\ $ donc $f(x) \neq 0$ ■

Propriété – définition :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. On l'appelle **fonction exponentielle** notée **exp**.

Démonstration :

L'existence est admise et démontrons l'unicité.
Soit g une autre fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On pose $h = \frac{g}{f}$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$, h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{f^2(x)} = 0$$

donc h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$

or $f(0) = g(0) = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$ donc $f(x) = g(x)$ ■

Propriété.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0}$

Démonstration par l'absurde :

Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, $\exp(a) < 0$

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est donc continue, or $\exp(0) = 1 > 0$ et $\exp(a) < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre b compris entre 0 et a tel que $\exp(b) = 0$ ce qui est impossible d'après le lemme.

donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) > 0$ ■

Propriété : relation fonctionnelle

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{exp}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) \times \mathbf{exp}(\boldsymbol{y})$

Démonstration :

On fixe $y \in \mathbb{R}$ et on considère la fonction $f_y : x \mapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$

Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f_y'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x+y))^2} = 0$$

donc f_y est une fonction constante sur $\mathbb{R}$

or $f_y(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp(y)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$

et donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ ■

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = e^x > 0$

donc $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ■

Propriété

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

La courbe de l'exponentielle admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Démonstration :

Limite en $+\infty$:

La fonction $f(x) = e^x - x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = e^x - 1$$

$e^0 = 1$ donc $\forall x \geq 0 \ \ e^x \geq 1$ d'où $f'(x) \geq 0$

Par conséquent, la fonction $f(x) = e^x - x$ est croissante sur $[0;+\infty[$ donc $\forall x \geq 0,\ \ f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^x - x \geq e^0 - 0$ donc $e^x - x > 0 \Leftrightarrow e^x > x$ pour tout $x \geq 0$.

On en déduit, par comparaison, que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ ■

Limite en $-\infty$:

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = 0$ ■

Exemples.

▶ 1. La fonction $f(x) = e^{x^2-5x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = (2x-5)e^{x^2-5x+1}$.

▶ 2. Les fonctions $g(x) = e^{-kx}$ et $h(x) = e^{-kx^2}$ où $k > 0$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g'(x) = -ke^{-kx}$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ h'(x) = -2kxe^{-kx^2}$$

Théorème.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x=0$$

Démonstration :

La fonction e^x est dérivable en 0 donc par définition :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=e^0=1 \quad \text{car } (e^x)'=e^x \blacksquare$$

La fonction $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = e^x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f''(x) = e^x - 1.$

$e^0 = 1$ donc $\forall x \geq 0\ \ e^x \geq 1$ d'où $f''(x) \geq 0$

Par conséquent, la fonction $f'(x) = e^x - x$ est croissante sur $[0;+\infty[$ donc $\forall x \geq 0,\ \ f'(x) \geq f'(0) \Leftrightarrow e^x - x \geq e^0 - 0 > 0$ donc $e^x - x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$.

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Par conséquent, la fonction $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$ est croissante sur $[0;+\infty[$ donc $\forall x \geq 0,\ \ f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{2}x^2 \geq 1 > 0$

donc $e^x > \frac{1}{2}x^2$ pour tout $x \geq 0$ et donc $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x$ pour tout $x > 0$

On en déduit, par comparaison, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ■

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{-x}{e^{-x}} = 0$ ■

Exemple.

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+7)e^x$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ e^x - x = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x = +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ (2x+7)e^{x} = 2xe^{x} + 7e^{x}$

or $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+7)e^{x} = 0$