

Blaise Pascal (1623 - 1662)



Mathématicien, physicien, philosophe, moraliste et théologien français, il publie un traité de géométrie projective à seize ans ; ensuite il développe, en 1654, une méthode de résolution du « problème des partis » qui, donne naissance au cours du XVIII^e siècle au calcul des probabilités.

I. Conditionnement par un événement

Problème n°1 :

On lance un dé équilibré une fois et on étudie les deux événements suivants :

A : « le nombre est inférieur ou égal à 5 »

B : « le nombre est supérieur ou égal à 3 »

Supposons que A soit réalisé, quelle est alors la probabilité que B soit réalisé aussi ?

Problème n°2 :

Un candidat à un examen sait qu'il se verra proposer à l'oral soit une question de type A avec une probabilité $0,6$ pour laquelle il estime ses chances d'avoir la moyenne à 40% , soit une question de type B avec une probabilité $0,4$ pour laquelle il estime ses chances d'avoir la moyenne à 70% .

Quelle est la probabilité pour ce candidat d'obtenir la moyenne ?

Sachant qu'il a eu la moyenne, quelle est la probabilité pour qu'il ait été interrogé sur une question de type B ?

Sachant qu'il n'a pas eu la moyenne, quelle est la probabilité pour qu'il ait été interrogé sur une question de type A ?

Définition :

Une loi de probabilité P est définie sur un ensemble Ω .

A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de l'événement B sachant A , notée $P_A(B)$, est dé-

finie par $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Exemple 1 :

Un SAV a constaté que les retours d'un appareil sont dus dans 30% des cas à une panne A , dans 40% des cas à une panne B et dans 3% des cas à la simultanéité des deux pannes. Un appareil choisi au hasard présente la panne A . Quelle est la probabilité qu'il ait aussi la panne B ?

Conséquence :

Une loi de probabilité P est définie sur un ensemble Ω .

A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de l'intersection entre A et B est :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

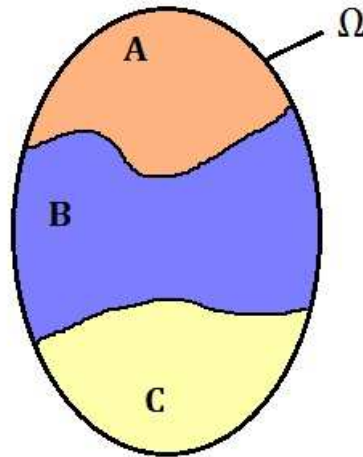
Exemple 2 :

Tous les élèves de Terminale ont passé un test de certification en anglais. 80% ont réussi le test. Parmi ceux qui ont réussi, 95% n'ont jamais redoublé et parmi ceux qui ont échoué, 2% n'ont jamais redoublé. Un élève est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il a réussi le test sans jamais redoubler ?

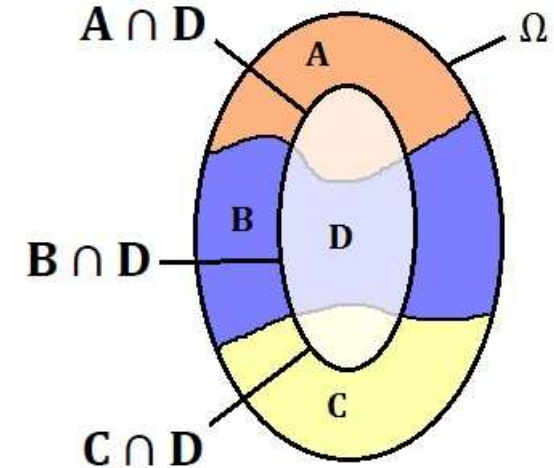
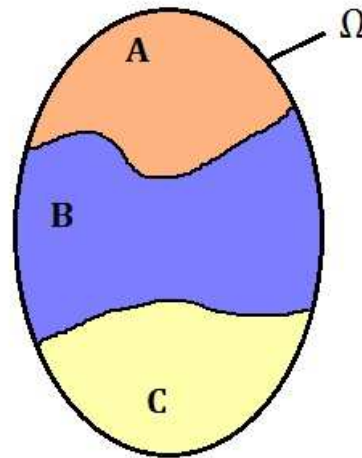
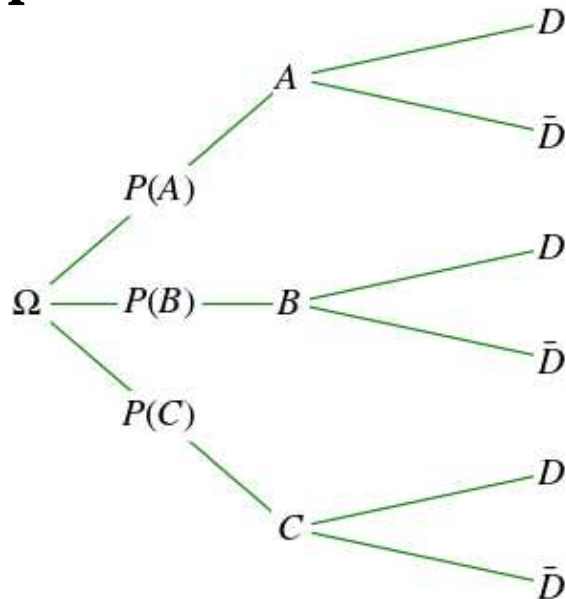
Définition :

Les événements A , B et C forment une **partition** de l'univers Ω lorsqu'ils sont incompatibles deux à deux et que leur réunion est Ω :

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset \quad \text{et} \quad B \cap C = \emptyset$$
$$A \cup B \cup C = \Omega$$



Propriété : Soit A, B et C une partition de Ω et D un événement



$D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$ où $A \cap D, B \cap D$ et $C \cap D$ sont incompatibles deux à deux

donc $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$$

Exemple 3 :

Pour se rendre à un endroit donné Alexandre dispose de 4 chemins possibles notés A , B , C et D .

$$P(\text{« choisir } A \text{ »}) = P(A) = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad P(C) = \frac{1}{12} \quad P(D) = \frac{1}{3}$$

La probabilité d'arriver en retard par le chemin A est $\frac{1}{20}$.

La probabilité d'arriver en retard par le chemin B est $\frac{1}{10}$ et

la probabilité d'arriver en retard par le chemin C est $\frac{1}{5}$.

En passant par le chemin D , Alexandre n'est jamais en retard.

Quelle est la probabilité pour qu'Alexandre soit en retard ?

II. Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont indépendants lorsque la réalisation ou non de B n'a pas d'influence sur la réalisation de A donc

$$P_B(A) = P(A) \quad \text{et} \quad P_A(B) = P(B)$$

$$\text{or } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \text{ donc } P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Définition

Deux événements A et B sont indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

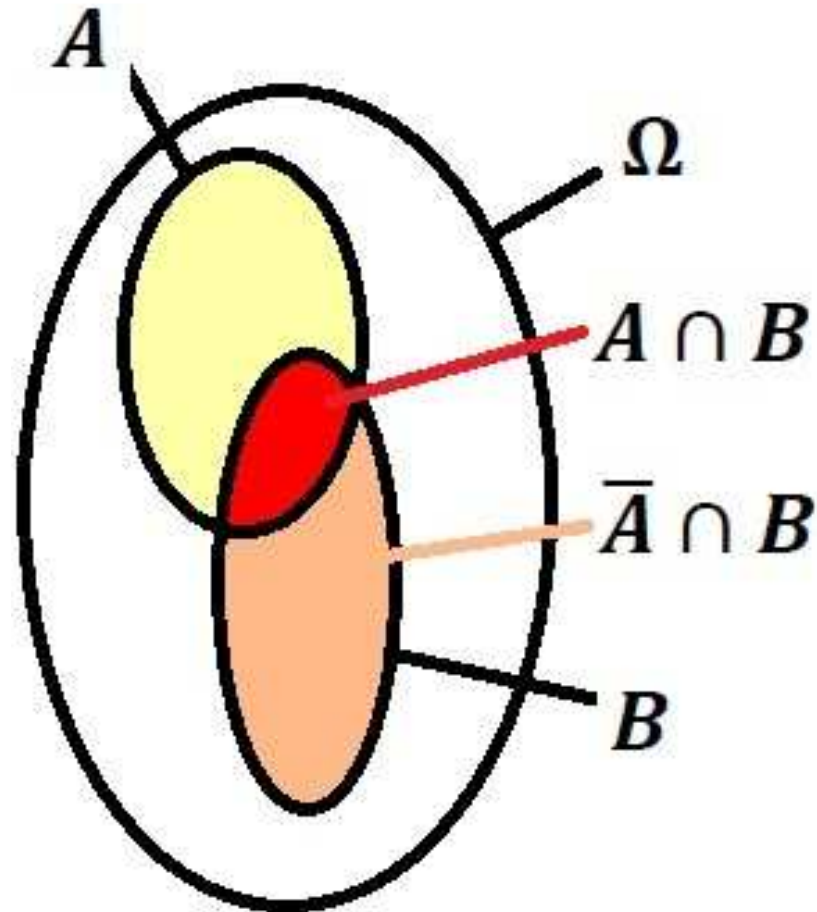
Propriété :

Si A et B sont deux événements indépendants alors \bar{A} et B sont aussi indépendants.

Démonstration (ROC) :

Chap 5. Probabilités conditionnelles

Terminale S



$A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ forment une partition de B

$$\text{donc } P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

or A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$\text{par conséquent } P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = (1 - P(A)) \times P(B)$$

$$\text{or } P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$$

$$\text{et donc } P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$$

On en déduit que \bar{A} et B sont indépendants eux aussi ■

Remarque :

De la même façon, on peut démontrer que si A et B sont indépendants alors A et \bar{B} sont aussi indépendants ainsi que \bar{A} et \bar{B} .

Exemple 4 :

On lance une pièce équilibrée deux fois de suite.

A : « Obtenir Pile au 1^{er} lancer »

B : « Obtenir Face au 2^e lancer »

C : « Obtenir au moins une fois Pile »

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Les événements A et C sont-ils indépendants ?