# Blaise Pascal (1623 - 1662)

Mathématicien, physicien, philosophe, moraliste et théologien français, il publie un traité de géométrie projective à seize ans ; ensuite il développe, en 1654, une méthode de résolution du « problème des partis » qui, donne naissance au cours du XVIIIe siècle au calcul des probabilités.

# I. Conditionnement par un événement

Problème n°1 :

On lance un dé équilibré une fois et on étudie les deux événements suivants :

$A$ : « le nombre est inférieur ou égal à 5 »

$B$ : « le nombre est supérieur ou égal à 3 »

***Supposons que A soit réalisé, quelle est alors la probabilité que B soit réalisé aussi ?***

Problème n°2 :

Un candidat à un examen sait qu'il se verra proposer à l'oral soit une question de type $A$ avec une probabilité 0,6 pour laquelle il estime ses chances d'avoir la moyenne à 40%, soit une question de type $B$ avec une probabilité 0,4 pour laquelle il estime ses chances d'avoir la moyenne à 70%.

***Quelle est la probabilité pour ce candidat d'obtenir la moyenne ?***
***Sachant qu'il a eu la moyenne, quelle est la probabilité pour qu'il ait été interrogé sur une question de type B ?***
***Sachant qu'il n'a pas eu la moyenne, quelle est la probabilité pour qu'il ait été interrogé sur une question de type A ?***

## Définition :

Une loi de probabilité $P$ est définie sur un ensemble $\Omega$.
$A$ et $B$ sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de l'événement $B$ sachant $A$, notée $P_A(B)$, est définie par $\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$.

## Exemple 1 :

Un SAV a constaté que les retours d'un appareil sont dus dans 30% des cas à une panne $A$, dans 40% des cas à une panne $B$ et dans 3% des cas à la simultanéité des deux pannes. Un appareil choisi au hasard présente la panne $A$. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi la panne $B$ ?

Conséquence :

Une loi de probabilité $P$ est définie sur un ensemble $\Omega$.
$A$ et $B$ sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de l'intersection entre $A$ et $B$ est :

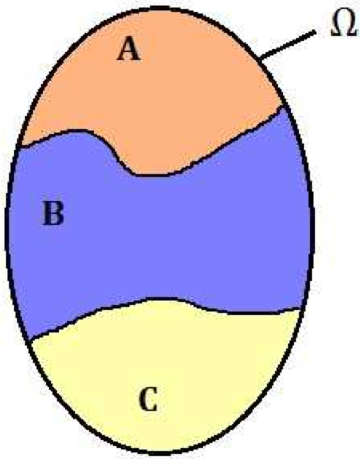
$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}.$$

**Exemple 2 :**

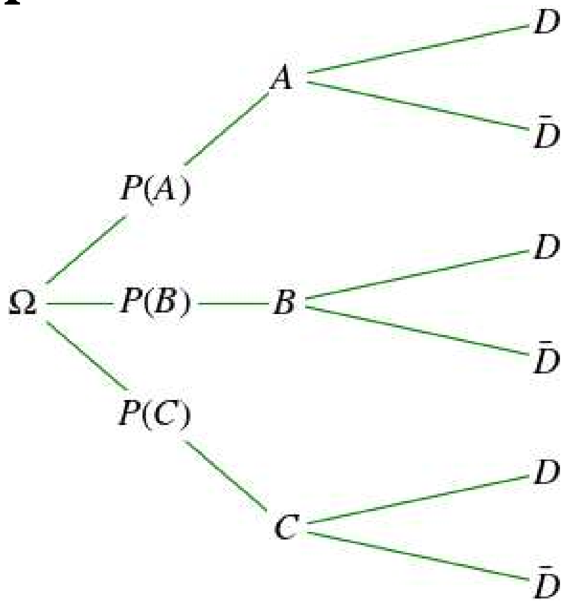
Tous les élèves de Terminale ont passé un test de certification en anglais. 80% ont réussi le test. Parmi ceux qui ont réussi, 95% n'ont jamais redoublé et parmi ceux qui ont échoué, 2% n'ont jamais redoublé. Un élève est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il a réussi le test sans jamais redoubler ?

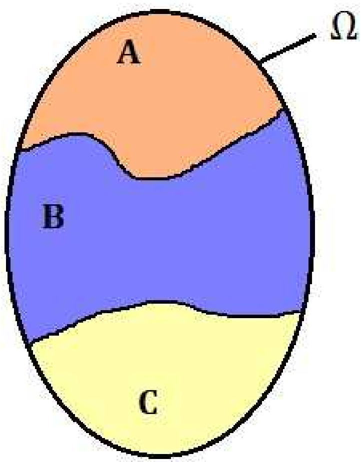
Définition :
Les événements $A$, $B$ et $C$ forment une partition de l'univers $\Omega$ lorsqu'ils sont incompatibles deux à deux et que leur réunion est $\Omega$ :

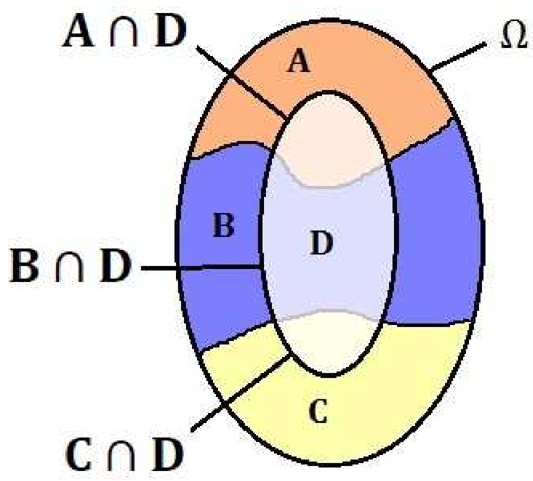
$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset \quad \text{et} \quad B \cap C = \emptyset$$
$$A \cup B \cup C = \Omega$$



Propriété : Soit $A$, $B$ et $C$ une partition de $\Omega$ et $D$ un événement




$D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$ où $A \cap D$, $B \cap D$ et $C \cap D$ sont incompatibles deux à deux

donc $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$

$$\boldsymbol{P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)}$$

Exemple 3 :

Pour se rendre à un endroit donné Alexandre dispose de 4 chemins possibles notés $A$, $B$, $C$ et $D$.

$$P(\text{« choisir } A \text{ »}) = P(A) = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad P(C) = \frac{1}{12} \quad P(D) = \frac{1}{3}$$

La probabilité d'arriver en retard par le chemin $A$ est $\frac{1}{20}$.

La probabilité d'arriver en retard par le chemin $B$ est $\frac{1}{10}$ et

la probabilité d'arriver en retard par le chemin $C$ est $\frac{1}{5}$.

En passant par le chemin $D$, Alexandre n'est jamais en retard.

***Quelle est la probabilité pour qu'Alexandre soit en retard ?***

## II. Indépendance de deux événements

Deux événements $A$ et $B$ sont indépendants lorsque la réalisation ou non de $B$ n'a pas d'influence sur la réalisation de $A$ donc

$$P_B(A) = P(A) \qquad \text{et} \qquad P_A(B) = P(B)$$

or $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$ donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

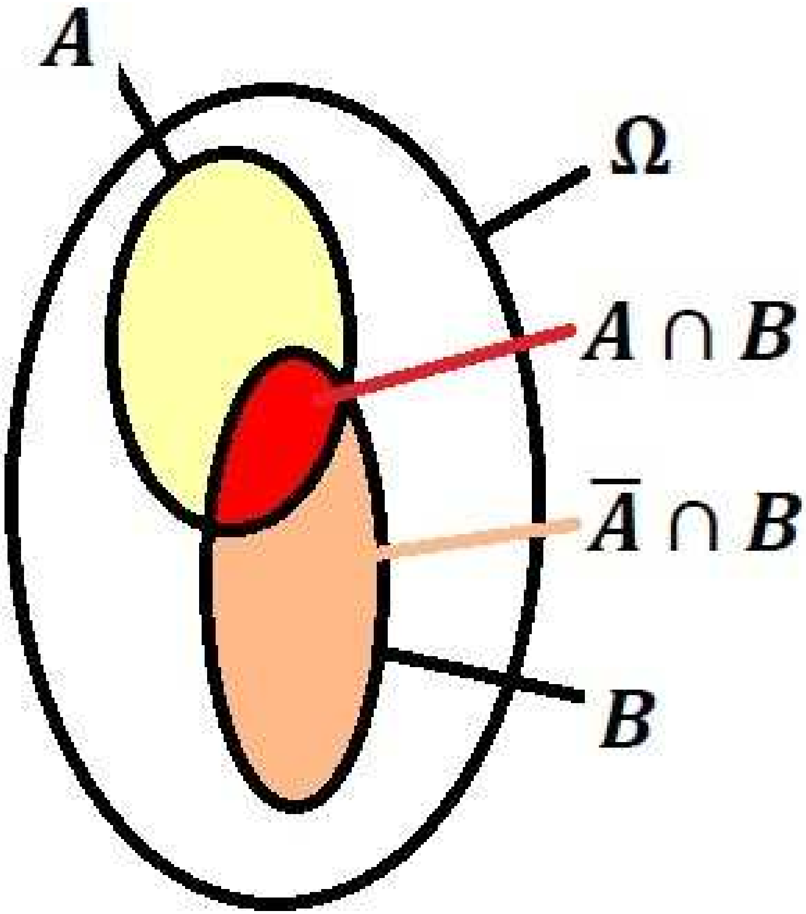
Définition

Deux événements $A$ et $B$ sont indépendants lorsque

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Propriété :
Si $A$ et $B$ sont deux événements indépendants alors $\bar{A}$ et $B$ sont aussi indépendants.

Démonstration (ROC) :




$A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ forment une partition de $B$

donc $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

or $A$ et $B$ sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

par conséquent $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \left(1 - P(A)\right) \times P(B)$$

or $P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$

et donc $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$

On en déduit que $\bar{A}$ et $B$ sont indépendants eux aussi ■

Remarque :
De la même façon, on peut démontrer que si $A$ et $B$ sont indépendants alors $A$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Exemple 4 :
On lance une pièce équilibrée deux fois de suite.
$A$ : « Obtenir Pile au 1er lancer »
$B$ : « Obtenir Face au 2e lancer »
$C$ : « Obtenir au moins une fois Pile »

***Les événements A et B sont-ils indépendants ?***
***Les événements A et C sont-ils indépendants ?***