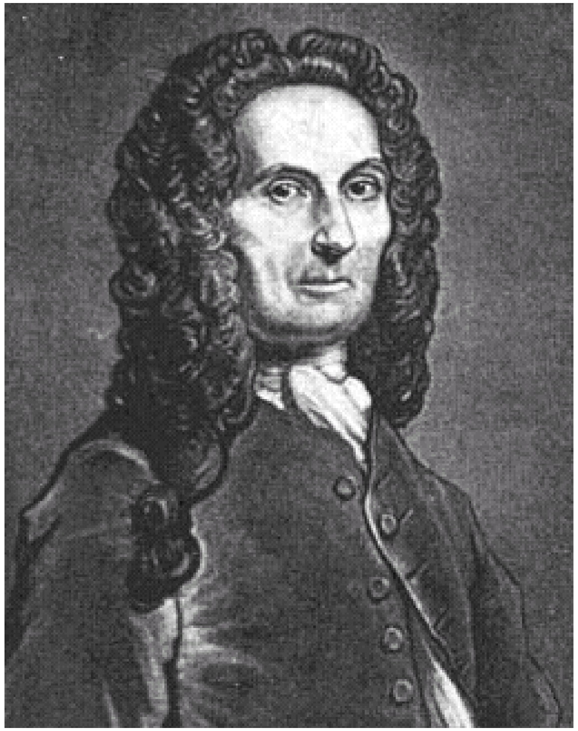
Chap 6. Notation exponentielle des nombres complexes

Abraham de Moivre (1667-1754)



Mathématicien surtout connu pour l'introduction des quantités imaginaires dans le calcul trigonométrique. Il s'intéressa également au calcul des probabilités : il énonça la règle des probabilités composées et un théorème « limite », montrant que la loi normale est une bonne approximation de la loi binomiale ; il étudia la théorie des séries récurrentes et employa la méthode des équations aux différences finies.

I. Produit et quotient de nombres complexes

Propriétés :

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

❶ $|zz'| = |z| \times |z'|$ **et** $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

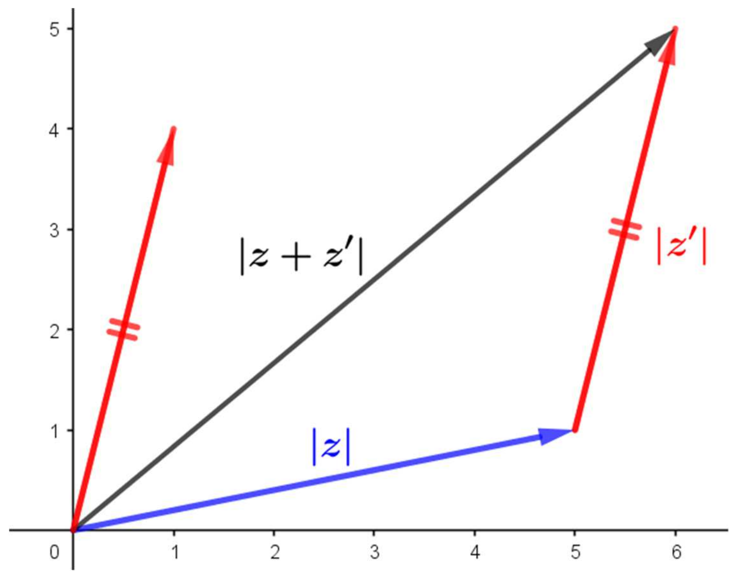
❷ $|z^n| = |z|^n$ **et** $\arg(z^n) = n \times \arg(z)\ [2\pi]$

❸ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ **et**

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$$

❹ Inégalité triangulaire :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$



II. Démontrer avec les nombres complexes

Propriété :

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B :

① $\boldsymbol{AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A|}$;

② Si A et B sont deux points distincts, alors

$$\boldsymbol{(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A)}$$

Conséquences :

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ des points deux à deux distincts :

$$\boldsymbol{\frac{CD}{AB} = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)}$$

III. La notation exponentielle d'un nombre complexe

Soit la fonction à valeurs complexes $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \theta \longmapsto \cos\theta + i\sin\theta \end{array}$

Propriétés :

❶ $\boldsymbol{f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')}$
❷ $\boldsymbol{f'(\theta) = if(\theta)}$

Définition :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{\cos\theta + i \times \sin\theta = e^{i\theta}}$$

$e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe de module 1 et dont un argument est θ.

Exemples :

$e^{i0} = \cdots$

$e^{i\pi} = \cdots$

$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cdots$

$e^{\frac{-i\pi}{2}} = \cdots$

$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cdots$

$2e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cdots$

$8e^{\frac{-5\pi}{6}i} = \cdots$

Définition :

Une **forme exponentielle** du nombre complexe z est $\boldsymbol{z = |z|e^{i\theta}}$ où θ est un argument de z.

Propriétés : $\forall\theta \in \mathbb{R}, \forall\theta' \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta \ [2\pi]$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \text{ (Formule de Moivre)}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

$$\frac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i(\theta'-\theta)}$$

$$e^{i\theta'} = e^{i\theta} \Leftrightarrow \theta' = \theta \ [2\pi]$$