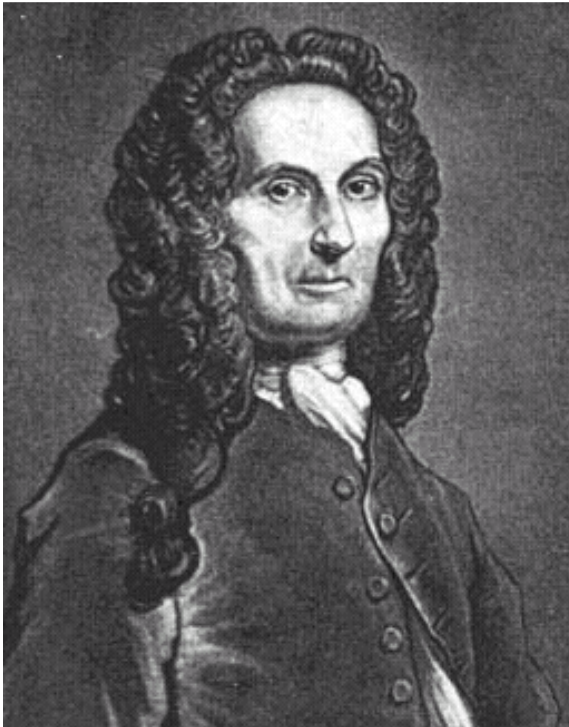


Chap 6. Notation exponentielle des nombres complexes

Abraham de Moivre (1667-1754)



Mathématicien surtout connu pour l'introduction des quantités imaginaires dans le calcul trigonométrique. Il s'intéressa également au calcul des probabilités : il énonça la règle des probabilités composées et un théorème « limite », montrant que la loi normale est une bonne approximation de la loi binomiale ; il étudia la théorie des séries récurrentes et employa la méthode des équations aux différences finies.

I. Produit et quotient de nombres complexes

Propriétés :

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

① $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

② $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \times \arg(z) [2\pi]$

③ $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$

④ Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

II. Démontrer avec les nombres complexes

Propriété :

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B :

① $AB = |\vec{z}_{AB}| = |z_B - z_A|$;

② Si A et B sont deux points distincts, alors

$$(\vec{u}; \vec{AB}) = \arg(\vec{z}_{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

Conséquences :

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ des points deux à deux distincts :

$$\frac{CD}{AB} = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \left| \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right| \quad \text{et} \quad (\vec{AB}; \vec{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

III. La notation exponentielle d'un nombre complexe

Soit la fonction à valeurs complexes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $\theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$

Propriétés :

- ① $f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$
- ② $f'(\theta) = if(\theta)$

Chap 6. Notation exponentielle des nombres complexes

Définition :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos \theta + i \times \sin \theta = e^{i\theta}$$

$e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe de module 1 et dont un argument est θ .

Exemples :

$$e^{i0} = \dots$$

$$e^{i\pi} = \dots$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = \dots$$

$$e^{\frac{-i\pi}{2}} = \dots$$

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dots$$

$$2e^{-i\frac{\pi}{4}} = \dots$$

$$8e^{\frac{-5\pi}{6}i} = \dots$$

Chap 6. Notation exponentielle des nombres complexes

Définition :

Une **forme exponentielle** du nombre complexe z est $z = |z|e^{i\theta}$
où θ est un argument de z .

Propriétés : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall \theta' \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|e^{i\theta}| = 1 \text{ et } \arg(e^{i\theta}) = \theta [2\pi]$$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ (Formule de Moivre)}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

$$\frac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i(\theta'-\theta)}$$

$$e^{i\theta'} = e^{i\theta} \Leftrightarrow \theta' = \theta [2\pi]$$