Conséquences :

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ des points deux à deux distincts :

$$\boldsymbol{\frac{CD}{AB} = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|}$$

et $$\boldsymbol{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)}$$

Démonstration

$$\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \frac{CD}{AB}$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{CD}\right) = -\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{CD}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(z_{\overrightarrow{CD}}\right) - \arg\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(z_D - z_C\right) - \arg\left(z_B - z_A\right)$$
$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \blacksquare$$

Propriétés :

❶ $\boldsymbol{f(\theta)\times f(\theta') = f(\theta+\theta')}$

❷ $\boldsymbol{f'(\theta) = if(\theta)}$

Démonstration

❶ $f(\theta)\times f(\theta') = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$= \cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$$

$$= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$$

$$= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$$

$\boldsymbol{f(\theta)\times f(\theta') = f(\theta + \theta')}$

donc la fonction $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ vérifie la même relation fonctionnelle que l'exponentielle :

$$e^x \times e^y = e^{x+y}.$$

❷ La fonction $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \qquad f'(\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta$$
$$f'(\theta) = i^2\sin\theta + i\cos\theta$$
$$f'(\theta) = i(i\sin\theta + \cos\theta)$$
$$f'(\theta) = if(\theta)$$