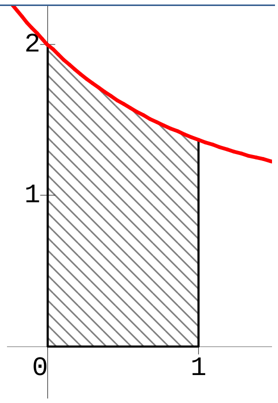
Exercice de recherche



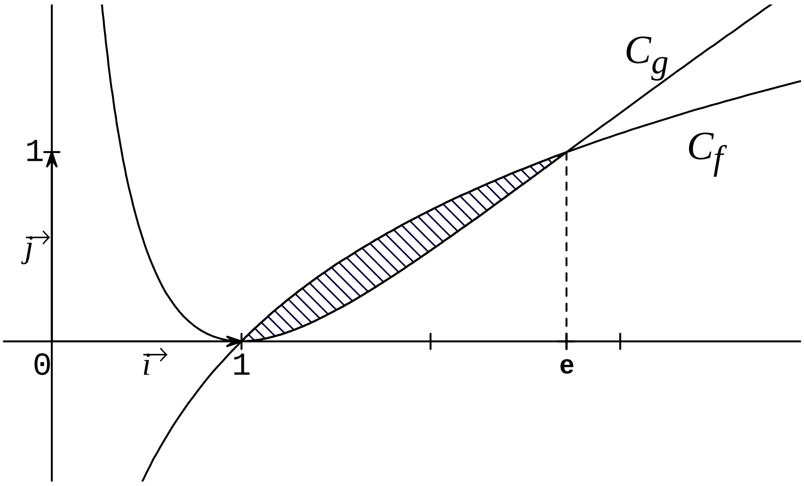
On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $g(x) = 1 + e^{-x}$.
On remarque que la fonction g est strictement positive sur l'intervalle $[0; 1]$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal, et $\mathcal{D}$ le domaine délimité d'une part par l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$, et d'autre part par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. La courbe $\mathcal{C}$ et le domaine $\mathcal{D}$ sont représentés ci-contre.

▶1. On souhaite partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire par une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Démontrer qu'il existe une unique droite d'équation $x = a$ réalisant un tel partage et donner un encadrement de a d'amplitude 10^{-2}.

▶2. On veut maintenant réaliser un partage de $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire encore, mais par une droite parallèle à l'axe des abscisses. On admet qu'il existe une unique droite d'équation $y = b$ réalisant ce partage. Déterminer la valeur exacte de b.

Exercice de BAC

Les courbes C_f et C_g données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
$f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.



▶1. On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note $I = \displaystyle\int_1^e \ln x \, dx$ et $J = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^2 dx$

Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.
On admet que $J = e - 2I$. En déduire J puis donner la valeur de A.

▶2. Pour x appartenant à l'intervalle $[1; e]$, on note M le point de la courbe C_f d'abscisse x et N le point de la courbe C_g de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.