Exercice 1.

Les droites qui passent par le point $A(0;2)$ ont une équation de la forme :

$$\Delta_\alpha :\ y = \alpha x + 2$$

Déterminons les points d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ_α :

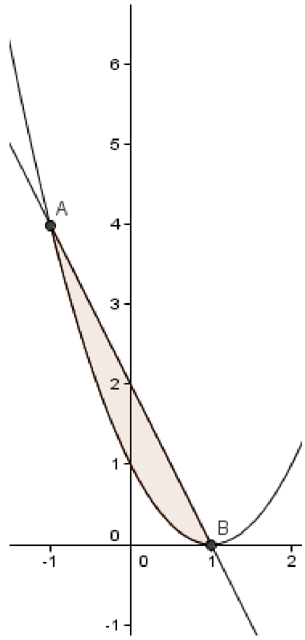
$$(x-1)^2 = \alpha x + 2 \Leftrightarrow x^2 - (2+\alpha)x - 1 = 0$$

$$\Delta = (2+\alpha)^2 - 4\times(-1) = (2+\alpha)^2 + 4 > 0$$

Quelque soit la valeur de α, et donc quelque soit l'inclinaison de la droite Δ_α, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ_α ont deux points d'intersection d'abscisses :

$$x_1 = \frac{2+\alpha-\sqrt{(2+\alpha)^2+4}}{2} = \frac{2+\alpha}{2} - \frac{\sqrt{(2+\alpha)^2+4}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2+\alpha+\sqrt{(2+\alpha)^2+4}}{2} = \frac{2+\alpha}{2} + \frac{\sqrt{(2+\alpha)^2+4}}{2}$$



La parabole est tournée vers le haut donc $(x-1)^2 \leq \alpha x + 2\ \forall x \in [x_1; x_2]$

Notons $f(\alpha)$ l'aire du domaine D où $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} (\alpha x + 2 - (x-1)^2)dx = \int_{x_1}^{x_2} (-x^2 + (2+\alpha)x + 1)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{(2+\alpha)x^2}{2} + x\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= -\frac{{x_2}^3 - {x_1}^3}{3} + \frac{(2+\alpha)({x_2}^2 - {x_1}^2)}{2} + x_2 - x_1$$

or $x_2 - x_1 = 2\dfrac{\sqrt{(2+\alpha)^2+4}}{2} = \sqrt{(2+\alpha)^2+4}$

$$x_2^2 - x_1^2 = 4\times\frac{2+\alpha}{2}\times\frac{\sqrt{(2+\alpha)^2+4}}{2} = (2+\alpha)\sqrt{(2+\alpha)^2+4}$$

$$x_2^3 - x_1^3 = \sqrt{(2+\alpha)^2+4}((2+\alpha)^2+1)$$

$$f(\alpha) = \frac{\sqrt{(2+\alpha)^2+4}}{6}(-2((2+\alpha)^2+1) + 3(2+\alpha)^2 + 6)$$

$$f(\alpha) = \frac{\sqrt{(2+\alpha)^2+4}((2+\alpha)^2+4)}{6}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$f'(\alpha) = \frac{1}{6}\left(\frac{2(2+\alpha)}{2\sqrt{(2+\alpha)^2+4}}((2+\alpha)^2+4) + \sqrt{(2+\alpha)^2+4}(2(2+\alpha))\right)$$

$$f'(\alpha) = \frac{1}{6}\left(\frac{(2\alpha+4)((2+\alpha)^2+4)}{2\sqrt{(2+\alpha)^2+4}} + \frac{2((2+\alpha)^2+4)(2\alpha+4)}{2\sqrt{(2+\alpha)^2+4}}\right)$$

3

$$f'(\alpha)=\frac{(\alpha+2)((2+\alpha)^2+4)}{2\sqrt{(2+\alpha)^2+4}}=\frac{(\alpha+2)\sqrt{(2+\alpha)^2+4}}{2}$$

$f'(\alpha)>0 \Leftrightarrow \alpha+2>0 \Leftrightarrow \alpha>-2$

α	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$		$\searrow$	$4/3$	$\nearrow$	

$$f(-2)=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

Exercice 2. — 7

1. $\forall n\geq 1, I_n$ représente l'aire du domaine situé sous la courbe de f_n, limité par l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=1$. D'après le graphique, on peut conjecturer que cette aire augmente lorsque n augmente et qu'elle est majorée par 1 (aire du carré) donc cette suite converge. On conjecture qu'elle converge vers 1.

2. $I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=[\ln(1+x)]_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2$

3. $x\geq 0$, donc $\forall n\geq 1, x^n\geq 0$ et $x^n+1\geq 1$ et donc $\frac{1}{1+x^n}\leq 1$

$\forall n\geq 1,\quad \dfrac{1}{1+x^n}\leq 1$ donc $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^n}dx\leq\int_0^1 1dx=1$

4. $0\leq x\leq 1$, donc $\forall n\geq 1, 0\leq x^{2n}\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq 1-x^{2n}\leq 1$

$1-x^{2n}=(1-x^n)(1+x^n)\leq 1$ et donc $1-x^n\leq\dfrac{1}{1+x^n}$

5. $\displaystyle\int_0^1(1-x^n)dx=\left[x-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=1-\frac{1}{n+1}$

6. On en déduit que $\forall n\geq 1, \displaystyle\int_0^1(1-x^n)dx\leq I_n\leq 1$

$1-\dfrac{1}{n+1}\leq I_n\leq 1$ or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{n+1}=1$

et donc, d'après le théorème des gendarmes on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=1$

7. Si l'on entre les valeurs $n=2$ et $p=5$, l'algorithme donne environ 0,8337.

		$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
x		0	1/5	2/5	3/5	4/5
I	0	0,2	0,3923	0,5647	0,7118	0,8337

Cet algorithme permet de calculer une valeur approchée de I_n pour une valeur de n choisie.