## Exercice n°1

**1.**

La suite $(u_n)$ est constante lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$

$$\frac{668}{669}u_n + 3 = u_n \Leftrightarrow 3 = \frac{1}{669}u_n \Leftrightarrow u_n = 2007$$

En particulier $u_0 = a = 2007$.

**2.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 2007}{u_n - 2007} = \dfrac{\frac{668}{669}u_n + 3 - 2007}{u_n - 2007}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{668}{669}u_n - 2004}{u_n - 2007} = \frac{\frac{668}{669}\left(u_n - 2004 \times \frac{669}{668}\right)}{u_n - 2007} = \frac{\frac{668}{669}(u_n - 2007)}{u_n - 2007}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{668}{669}$.

La suite $(v_n)$ est donc géométrique de raison $\frac{668}{669}$ et de 1er terme $a - 2007$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (a - 2007) \times \left(\dfrac{668}{669}\right)^n$.

Par conséquent, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 2007 = (a - 2007) \times \left(\dfrac{668}{669}\right)^n + 2007$.

Puisque $0 < \dfrac{668}{669} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{668}{669}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2007$

**3.**

```
N PREND_LA_VALEUR 0
U PREND_LA_VALEUR 0
S PREND_LA_VALEUR 0
POUR I ALLANT_DE 1 A 99
  DEBUT_POUR
  N PREND_LA_VALEUR N+1
  U PREND_LA_VALEUR 668*U/669+3
  S PREND_LA_VALEUR S+U
  FIN_POUR
AFFICHER S
```

```
***Algorithme lancé***
14150.435

***Algorithme terminé***
```

## Exercice n°2

A chaque étape, les longueurs sont divisées par 2, l'aire est donc divisée par 4.
La suite des aires des triangles forme donc une suite géométrique de raison 1/4.
L'aire des 6 triangles est donc :

$$A_6 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{32} + \frac{a^2}{128} + \frac{a^2}{512} + \frac{a^2}{2048} = \frac{a^2}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^6}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{a^2}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{4096}}{\frac{3}{4}}$$

$$A_6 = \frac{a^2}{2} \times \frac{4095}{4096} \times \frac{4}{3} = \frac{1365a^2}{2048}$$

L'aire des $n$, $n \in \mathbb{N}^*$ triangles est donc :

$$A_n = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{32} + \cdots + \frac{a^2}{2 \times 4^{n-1}} = \frac{a^2}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2a^2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2a^2}{3} \times \left(1 - \dfrac{1}{4^n}\right) = \dfrac{2a^2}{3}$