Exercice n°1

Soit $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 0,\underbrace{333\ldots3}_{n+1 \text{ fois}}$ donc $10 \times u_{n+1} = 3,\underbrace{333\ldots3}_{n \text{ fois}} = u_n + 3$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - \frac{1}{3}}{u_n - \frac{1}{3}} = \frac{30u_{n+1} - 10}{30u_n - 10} = \frac{3u_n + 9 - 10}{30u_n - 10} = \frac{1}{10}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $1/10$.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \left(0{,}3 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{10^{n-1}}$$

$$\text{donc } u_n = v_n + \frac{1}{3} = \left(0{,}3 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{3}$$

$$\text{or } \lim_{n \to +\infty} v_n = 0 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

Exercice n°2

Soit $n \in \mathbb{N}$ le nombre de tuyaux sur la première ligne, la 2^e ligne contient $n - 1$ tuyaux, la 3^e ligne contient $n - 2$ tuyaux … etc jusqu'à la dernière ligne qui contient 1 seul tuyau. Le nombre total de tuyaux est donc

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = 153$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 153 \Leftrightarrow n^2 + n - 306 = 0$$

$$\Delta = \sqrt{1225} = 35^2 \text{ donc } n = \frac{-1 + \sqrt{35^2}}{2} = 17 \text{ ou } n = -18 \text{ (exclu)}$$

Jules doit poser 17 tuyaux au sol.

Etape	Nombre de côtés de la figure	Côté des carrés élémentaires	Nombre de carrés élémentaire ajoutés
0	12	c	4
1	60	$\frac{c}{3}$	12
2	300	$\frac{c}{9}$	60
…			
n	12×5^n	$\frac{c}{3^n}$	$12 \times 5^{n-1}$

Le nombre de côtés est une suite géométrique de 1^er terme 12 et de raison 5 car chaque côté se transforme en 5 côtés à l'étape suivante.

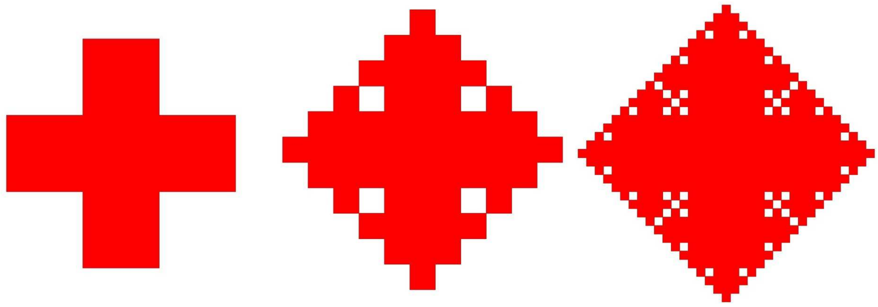
On en déduit **qu'à l'étape $n \in \mathbb{N}$, le nombre de côté vaut $u_n = 12 \times 5^n$.**
La longueur du côté des carrés est une suite géométrique de 1^er terme c et de raison $\frac{1}{3}$ car le côté est partagé en trois à l'étape suivante.

On en déduit **qu'à l'étape $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, la longueur d'un côté vaut $\boldsymbol{L_n = c \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$.**

Par conséquent, à l'étape $n \in \mathbb{N}$, le périmètre est :

$$P_n = u_n \times L_n = 12 \times 5^n \times c \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 12c \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{5}{3}$, donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = +\infty}$ car $\frac{5}{3} > 1$.



A chaque étape, on rajoute un carré sur chaque côté existant donc le nombre de carrés ajoutés est $C_n = u_{n-1}$ pour $n \geq 1$ soit $\boldsymbol{C_n = 12 \times 5^{n-1}}$

Ces carrés ont pour aire, pour $n \geq 1$:

$$A_n = \left(c \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2 \times 12 \times 5^{n-1} = \frac{c^2}{3^{2n}} \times 12 \times 5^{n-1} = 12c^2 \times \frac{5^{n-1}}{9^n}$$

$$= \frac{12c^2}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} = \frac{4c^2}{3} \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$$

A partir du rang 1, la suite (A_n) est donc géométrique de raison $\frac{5}{9}$ et de 1er terme $\frac{4c^2}{3}$. L'aire totale est la somme de ces termes soit :

$$S_n = c^2 + 4c^2 + \frac{4c^2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n}{1 - \frac{5}{9}} = 5c^2 + \frac{4c^2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n}{\frac{4}{9}}$$

$$= 5c^2 + \frac{4c^2}{3} \times \frac{9}{4} \times \left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right) = 5c^2 + 3c^2\left(1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right)$$

Et donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 8c^2}$ car $\left|\frac{5}{9}\right| < 1$.