Exercice n°1

1.

$0! = 1 > 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est le produit de facteurs tous strictement positifs donc v_n est strictement positif.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \times \cancel{n} \times \cancel{(n-1)} \times \cancel{(n-2)} \times \ldots \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{n} \times \cancel{(n-1)} \times \cancel{(n-2)} \times \ldots \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1) \times \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n + 1 \geq 1 \Leftrightarrow v_{n+1} \geq v_n \text{ puisque } v_n > 0$$

La suite (v_n) est donc croissante.

2.

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $v_n \geq n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation pour $n = 1$:

$v_1 = 1! = 1$ donc $v_1 \geq 1$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$: $v_n \geq n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé

$$v_n \geq n$$
$$\Leftrightarrow \quad n! \geq n \geq 1$$
$$\Leftrightarrow (n+1) \times n! \geq (n+1) \times 1$$
$$\Leftrightarrow (n+1)! \geq (n+1)$$
$$\Leftrightarrow v_{n+1} \geq n + 1$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

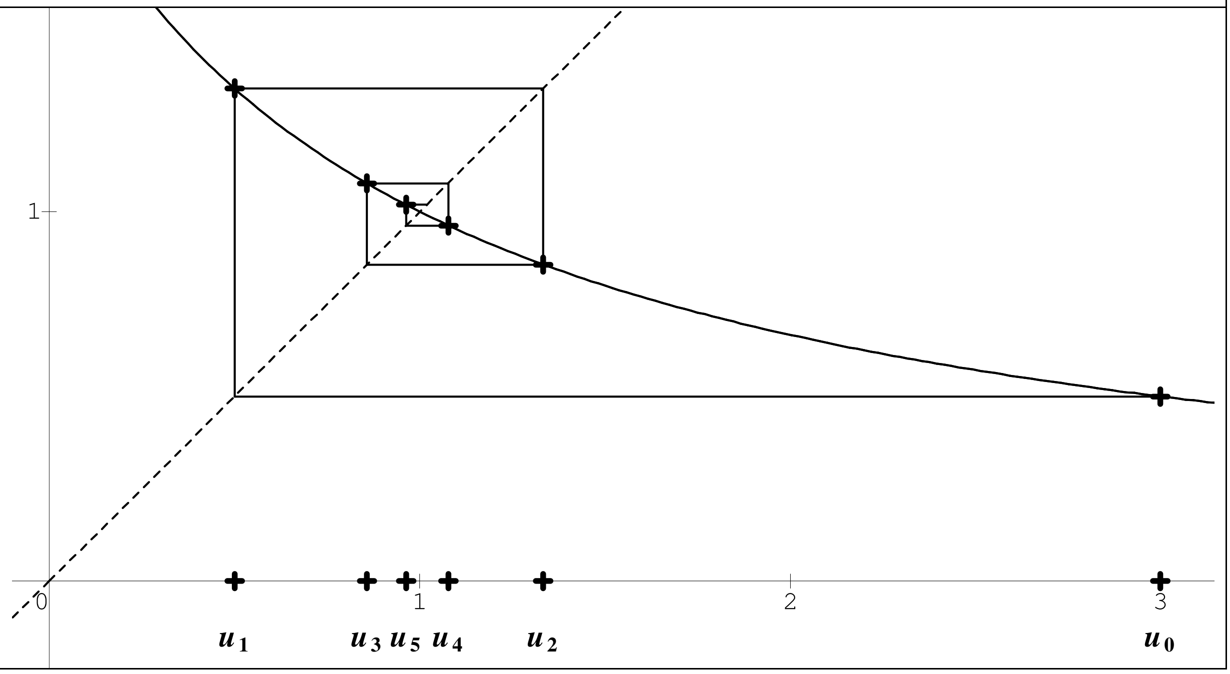
Par conséquent : $v_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Exercice n°2

1.



		On conjecture que la suite (u_n) est bornée entre 0 et 3 et qu'elle converge.
	2.	Initialisation : pour $n = 0$, $0 \leq u_0 = 3 \leq 3$ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq 3$ $0 \leq u_n \leq 3$ $\Leftrightarrow 1 \leq 1 + u_n \leq 4$ $\Leftrightarrow 1 \geq \dfrac{1}{1+u_n} \geq \dfrac{1}{4}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ $\Leftrightarrow 2 \geq \dfrac{2}{1+u_n} \geq \dfrac{2}{4}$ donc $0 \leq \dfrac{1}{2} \leq u_{p+1} \leq 2 \leq 3$ On en déduit que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$
	3a	Initialisation : pour $n = 0$, $1 + \dfrac{6}{5 \times (-2)^0 - 2} = 1 + \dfrac{6}{3} = 3 = u_0$ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 1 + \dfrac{6}{5 \times (-2)^n - 2}$ $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} = \dfrac{2}{1 + 1 + \dfrac{6}{5 \times (-2)^n - 2}}$ $u_{n+1} = \dfrac{2(5 \times (-2)^n - 2)}{10 \times (-2)^n - 4 + 6}$ $u_{n+1} = \dfrac{2(5 \times (-2)^n - 2)}{10 \times (-2)^n + 2}$ $u_{n+1} = \dfrac{2(5 \times (-2)^n - 2)}{2(5 \times (-2)^n + 1)}$ $u_{n+1} = \dfrac{5 \times (-2)^n - 2}{5 \times (-2)^n + 1}$ or $1 + \dfrac{6}{5 \times (-2)^{n+1} - 2} = \dfrac{5 \times (-2)^{n+1} - 2 + 6}{5 \times (-2)^{n+1} - 2}$ $= \dfrac{-10 \times (-2)^n + 4}{-10 \times (-2)^n - 2}$ $= \dfrac{5 \times (-2)^n - 2}{5 \times (-2)^n + 1} = u_{n+1}$

		On en déduit que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \dfrac{6}{5 \times (-2)^n - 2}$
	3b	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \dfrac{6}{5 \times (-2)^n - 2}$ $u_n = 1 + \dfrac{6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{(5 \times (-2)^n - 2) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ $u_n = 1 + \dfrac{6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{5 \times (-2)^n \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ $u_n = 1 + \dfrac{6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{5 \times \left(-\frac{-2}{2}\right)^n - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ $u_n = 1 + \dfrac{6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{5 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$