

Exercice n°1	1.	$0! = 1 > 0$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est le produit de facteurs tous strictement positifs donc v_n est strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \times n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}$ $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1) \times n!}{n!} = n+1 \geq 1 \Leftrightarrow v_{n+1} \geq v_n \text{ puisque } v_n > 0$ La suite (v_n) est donc croissante.
	2.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n) : v_n \geq n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Initialisation pour $n = 1$: $v_1 = 1! = 1$ donc $v_1 \geq 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n) : v_n \geq n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé $v_n \geq n \Leftrightarrow n! \geq n \geq 1$ $\Leftrightarrow (n+1) \times n! \geq (n+1) \times 1$ $\Leftrightarrow (n+1)! \geq (n+1)$ $\Leftrightarrow v_{n+1} \geq n+1$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Par conséquent : $v_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
	3.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, par comparaison, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
Exercice n°2	1.	$\frac{1}{4}x^2 + 2 \geq x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - x + 1 \geq 0$ $\Delta = 1 - 4 \times \frac{1}{4} = 0 \text{ il y a une racine double } x = \frac{1}{2 \times \frac{1}{4}} = 2$ $\text{donc } \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = \frac{1}{4}(x-2)^2 \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$ $\text{et donc } \frac{1}{4}x^2 + 2 \geq x + 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$
	2.	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n^2 + 2 \geq v_n + 1$ donc $v_{n+1} - v_n \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$, la suite est donc croissante.
	3.	Démontrons, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : v_n \geq n + 3$ Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 3 \geq 0 + 3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est à dire : $v_n \geq n + 3$ $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n^2 + 2 \geq v_n + 1 \geq n + 3 + 1 \text{ donc } v_{n+1} \geq n + 4$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On en déduit que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq n + 3$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 3 = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$