Exercice n°1

	A	B	C	D
1	Jour	Blanches	Noires	Probabilité
2	1	100	1	0,00990099
3	2	113	13	0,1031746
4	3	126	25	0,16556291
5	4	139	37	0,21022727
6	5	152	49	0,24378109
7	6	165	61	0,2699115
8	7	178	73	0,29083665
9	8	191	85	0,30797101
10	9	204	97	0,32225914
11	10	217	109	0,33435583
12	11	230	121	0,34472934
13	12	243	133	0,3537234
14	13	256	145	0,36159601
15	14	269	157	0,3685446
16	15	282	169	0,37472284
17	16	295	181	0,3802521
18	17	308	193	0,38522954
19	18	321	205	0,38973384
20	19	334	217	0,3938294
21	20	347	229	0,39756944
22	21	360	241	0,40099834
23	22	373	253	0,40415335
24	23	386	265	0,40706605

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons u_n le nombre de boules blanches le n^e jour et v_n le nombre de boules noires.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + 13$
Par conséquent, la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 13 et de 1er terme $u_1 = 100$.
On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_1 + (n-1) \times 13$$
$$u_n = 100 + 13n - 13$$
$$u_n = 87 + 13n$$

D'autre part :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = v_n + 12$
Par conséquent, la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 12 et de 1er terme $v_1 = 1$.
On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = v_1 + (n-1) \times 12$$
$$v_n = 1 + 12n - 12$$
$$v_n = 12n - 11$$

On peut en déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = \frac{v_n}{u_n + v_n}$$
$$p_n = \frac{12n - 11}{87 + 13n + 12n - 11} = \frac{12n - 11}{76 + 25n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 12n - 11 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 76 + 25n = +\infty \end{array}\right\} \text{la forme est indéterminée, par quotient.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{n\left(12 - \frac{11}{n}\right)}{n\left(\frac{76}{n} + 25\right)} = \frac{12 - \frac{11}{n}}{\frac{76}{n} + 25}$$

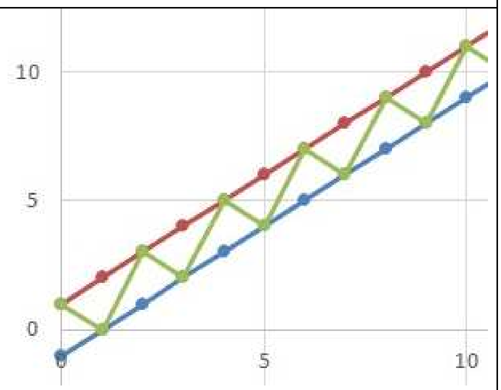
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 12 - \frac{11}{n} = 12 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{76}{n} + 25 = 25 \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{12}{25} = 0{,}48$$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente, sa limite est 12/25.

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Exercice n°2</td>
<td>P_1</td>
<td>
Supposons que (u_n) et (w_n) sont bornées,
alors il existe des nombres réels m_1, m_2, M_1 et M_2 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$m_1 \leq u_n \leq M_1 \text{ et } m_2 \leq w_n \leq M_2$$
or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$
alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1 \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq M_2$
et donc (v_n) est bornée elle aussi.
La proposition P_1 est vraie.
</td>
</tr>
<tr>
<td>P_2</td>
<td>
La réciproque de P_1 est : si (v_n) est bornée, alors (u_n) et (w_n) sont bornées aussi. La proposition P_2 est fausse.

Prenons, par exemple, les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par
$$u_n = -n \qquad v_n = \frac{1}{n} \qquad w_n = n \qquad \text{et} \qquad u_0 = v_0 = w_0 = 0$$
On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $-n \leq 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \leq n$
et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$

Mais, la suite (v_n) est bornée, alors que les suites (u_n) et (w_n) ne sont pas bornées car
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$
</td>
</tr>
<tr>
<td>P_3</td>
<td>
La proposition P_3 est fausse.



Prenons, par exemple, les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par
$$u_n = n - 1 \qquad v_n = n + (-1)^n \qquad w_n = n + 1$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$
$\Leftrightarrow \quad n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$
et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$

De plus, les suites (u_n) et (w_n) sont croissantes car :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = n + 1 - 1 - (n - 1) = n - n + 1 = 1 > 0$
$v_{n+1} - v_n = n + 1 + 1 - (n + 1) = n + 2 - n - 1 = 1 > 0$

Alors que (v_n) n'est pas croissante car
$$v_0 = 0 + (-1)^0 = 1$$
$$v_1 = 1 + (-1)^1 = 0 < v_0$$
</td>
</tr>
</table>

	$\boldsymbol{P_4}$	**La proposition P_4 est fausse.** Reprenons les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $$u_n = -n \qquad v_n = \frac{1}{n} \qquad w_n = n \qquad \text{et} \qquad u_0 = v_0 = w_0 = 0$$ On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $-n \leq 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \leq n$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
	$\boldsymbol{P_5}$	**La proposition P_5 est vraie.** Supposons que la suite (u_n) ne tende pas vers $-\infty$ Démontrons, par l'absurde, que la suite (v_n) ne tend pas vers $-\infty$. Supposons que la suite (v_n) tend vers $-\infty$ et démontrons que cela conduit à une absurdité. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ or la suite (v_n) tend vers $-\infty$ donc, par le théorème de comparaison, on en déduit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ ce qui es exclu par hypothèse. On en déduit que la suite (v_n) ne tend pas vers $-\infty$.
	$\boldsymbol{P_6}$	**La proposition P_6 est fausse.** Prenons, par exemple, la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $$u_n = 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad u_0 = 0$$ On a $u_0 = 0 \leq u_1 = 0$ De plus , on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)} > 0$ Mais, la suite (u_n) est donc croissante alors que $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$
	$\boldsymbol{P_7}$	La réciproque de P_6 est : Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (u_n) est croissante. **La proposition P_7 est fausse.** Prenons, par exemple, la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $$u_n = n + (-1)^n$$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ $\Leftrightarrow \quad n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n - 1 \leq u_n$

		De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1=+\infty$ Donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ Mais, (u_n) n'est pas croissante car $u_0=0+(-1)^0=1$ $u_1=1+(-1)^1=0<u_0$