Exercice n°1

Soit $x \in]0;+\infty[$ la vitesse en km.h^{-1} du trajet retour du cycliste et notons L la longueur du trajet, en km, effectué à l'aller.
Le temps du trajet aller est alors :

$$d = v \times t \Leftrightarrow t = \frac{d}{v} \text{ donc } t_{\text{aller}} = \frac{L}{25} \text{ heure}$$

Le temps du trajet retour est :

$$t_{\text{retour}} = \frac{L}{x} \text{ heure}$$

Au total, le trajet aller-retour aura duré : $t_{\text{aller}} + t_{\text{retour}} = \frac{L}{25} + \frac{L}{x}$ pour une longueur de trajet de $2L$. La vitesse est donc

$$v_{\text{totale}}(x) = \frac{2L}{t_{\text{aller}} + t_{\text{retour}}} = \frac{2L}{\frac{L}{25} + \frac{L}{x}} = \frac{2L}{\frac{xL + 25L}{25x}} = 2L \times \frac{25x}{xL + 25L} = \frac{50xL}{(x+25)L}$$

$$v_{\text{totale}}(x) = \frac{50x}{x+25}$$

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad x < x + 25 \text{ donc } \frac{x}{x+25} < 1$$

$$\text{donc } \frac{50x}{x+25} = v_{\text{totale}}(x) < 50$$

On peut remarquer que

$$\lim_{x \to +\infty} v_{\text{totale}}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{50x}{x+25} = \lim_{x \to +\infty} \frac{50}{1 + \frac{25}{x}} = 50$$

La vitesse moyenne 50 km.h^{-1} sur l'aller-retour est donc une asymptote, plus la vitesse retour sera élevée, plus la vitesse moyenne s'approchera de 50 km.h^{-1} mais sans jamais l'atteindre.

Exercice n°2

Partie 1.

Pour tout $z = x + iy, z' = x' + iy' \in \mathbb{C}^*$:

$$|z \times z'| = |(x+iy) \times (x'+iy')| = |xx' + ixy' + iyx' + i^2yy'|$$

$$= |xx' - yy' + i(xy' + yx')| = \sqrt{(xx' - yy')^2 + (xy' + yx')^2}$$

$$= \sqrt{x^2x'^2 \cancel{- 2xx'yy'} + y^2y'^2 + x^2y'^2 \cancel{+ 2xy'yx'} + y^2x'^2}$$

$$= \sqrt{x^2x'^2 + y^2y'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2}$$

Par ailleurs :

$$|z| \times |z'| = |x+iy| \times |x'+iy'| = \sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{x'^2+y'^2}$$

$$= \sqrt{(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)} = \sqrt{x^2x'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 + y^2y'^2}$$

$$= |z \times z'|$$

Exercice n°2

Partie 2.

$$\left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right| = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \frac{\sqrt{4\times 3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)i\right]$$

Pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n\right| = \left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right|\times|z_n| \text{ d'après la ROC}$$

$$r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times r_n$$

La suite (r_n) est donc géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0 = |z_0| = |1| = 1$

On en déduit que, pour tout entier naturel n,

$$r_n = r_0\times q^n = 1\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Pour tout entier naturel n, A_n est le point d'affixe z_n

$$OA_n = |z_n| = r_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} OA_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = 0 \text{ car } \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$$