Exercice 1 – [5 points]

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Proposition 1 :
L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2i|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe $1+i$.

Soit (E) l'équation $(z-1)(z^2-8z+25)=0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Proposition 2 :
Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $1+i$, $-2i$ et 4.
Proposition 3 :
On a alors $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Si z est un nombre complexe, on note $\bar{z}$ le nombre complexe conjugué du nombre z.
Proposition 4 :
L'équation $(2+i)\times z + z\times\bar{z} = 18-2i+i\times\bar{z}$ admet $3-i$ comme unique solution dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 – [6 points]

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1. Avec le parachute qui s'ouvre
On suppose, dans cette partie, que le parachute fonctionne correctement.
Soit v_1 la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$v_1(t) = 5\times\frac{e^{0,3t}-1}{e^{0,3t}+1}.$$
▶1a) Déterminer la limite de $v_1(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
b) Déterminer, en justifiant, le sens de variation de la fonction v_1.
▶2. On admet que, t secondes après qu'il a été lâché et tant qu'il n'a pas atteint le sol, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale à $v_1(t)$. On considère que le colis arrive en

bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s-1. Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie 2. Avec le parachute qui ne s'ouvre pas

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.

On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en $\mathrm{m.s^{-1}}$), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $v_2(t) = 32{,}7(1-e^{-0{,}3t})$.

On admet que la fonction v_2 est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

▶1a) Quelle est la vitesse, exprimée en m.s-1, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à 0,1 m.s-1.

b) Quelle est la valeur limite de v_2 ?

▶2. On propose l'algorithme suivant :

```
T prend la valeur 0
V prend la valeur .....
Tant que V .... 30
    T prend la valeur T ..... 0,1
    V prend la valeur 32,7(1 − e^(−0,3T))
Fin Tant que
Afficher ......
```

a) On admet que l'équation $v_2(t) = 30$ admet une unique solution positive notée α. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche une valeur approchée à 10^{-1} près de α, solution de l'équation $v_2(t) = 30$ m.s-1.

b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

▶3. On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis t secondes après que le colis a été lâché par le passager est donnée, pour tout $t \in [0;+\infty[$, par :

$$d(t) = 109(e^{-0{,}3t} + 0{,}3t - 1).$$

a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$,

$$d'(t) = v_2(t).$$

b. On sait que la chute du colis dure 20 secondes. Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la hauteur à laquelle il a été lâché par l'hélicoptère.

▶4. a) Démontrer que l'équation $d(t) = 700$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$.

b) Déterminer alors un encadrement d'amplitude 0,1 s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.

Exercice 3 – [4 points]

Les parties sont indépendantes. Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1.

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1% des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale.

En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4% de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.

On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :

R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,

D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

▶1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

▶2. a) Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.

b) La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité qu'elle habite en zone rurale ?

Partie 2.

Dans un village classé en **zone rurale**, un organisme de santé prélève, de façon aléatoire, un échantillon de 100 personnes que l'on peut assimiler à un tirage avec remise.

▶1. Quelle est la probabilité que cet échantillon contienne 9 personnes atteintes de diabète ?

▶2. L'organisme de santé dénombre dans son échantillon 9 personnes atteintes de diabète. Le statisticien se demande s'il n'y a pas erreur sur la provenance du prélèvement. Donner un intervalle de fluctuation au seuil de 95% du nombre de personnes atteintes de diabète dans un échantillon de 100 habitants du village. On pourra éventuellement utiliser les données des tableaux suivants.

Tableau n°1 : lorsque X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}064$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	$P(X \leq k)$	0,0013	0,0105	0,0416	0,1109	0,2259	0,3768	0,5403	0,6903	0,8096	0,8929	0,9448	0,9738	0,9885	0,9954	0,9983	0,9994

Tableau n°2 : lorsque X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}099$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	$P(X \leq k)$	0,0021	0,0085	0,0255	0,0613	0,1235	0,2154	0,3327	0,4645	0,5963	0,7148	0,8114	0,8832	0,9322	0,9631	0,9811	0,9909

Tableau n°3 : lorsque X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}082865$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	$P(X \leq k)$	0,0088	0,0297	0,0755	0,1549	0,2684	0,4062	0,5509	0,6846	0,7945	0,8758	0,9302	0,9635	0,9822	0,9919	0,9965	0,9986

Que répondre au statisticien de l'organisme de santé ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 – [5 points]

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20% des abeilles de l'année précédente.
Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c, $c \in \mathbb{R}$, ce nombre exprimé en **dizaines de milliers**.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en **dizaines de milliers**, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0{,}8u_n + c.$$

Partie A

On suppose, dans cette partie, que $c = 1$.

▶ 1. Conjecturer la monotonie et la limite éventuelle de la suite (u_n).
▶ 2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$.
▶ 3. a) Démontrer les deux conjectures établies à la question 1, en justifiant votre réponse.
b) Interpréter ces deux résultats.
▶ 4. A partir de quelle valeur de $n \in \mathbb{N}$, a-t-on $u_n > 4{,}99$?

Partie B

Dans cette partie, c est **un nombre réel quelconque**.
L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000. On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) telle que pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$.

▶ 1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
▶ 2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n.
▶ 3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.