Exercice 1.

1.

Les cannettes de soda ont une capacité de 33 $cL = 330\ cm^3$.
Elles ont la forme d'un cylindre dont le volume se calcule par la formule

$$V = 330 = \pi \times R^2 \times h = \pi \times x^2 \times h$$

$$\text{d'où } h = \frac{330}{\pi x^2}$$

2.

$f(x)$ l'aire totale du cylindre se calcule en ajoutant l'aire des deux bases de forme circulaires et l'aire latérale du cylindre.
Lorsque l'on déplie l'aire latérale, on obtient un rectangle de largeur h et de longueur $2\pi R$, l'aire vaut donc $2\pi R \times h$

$$f(x) = 2\pi R \times h + 2 \times \pi \times R^2 = 2\pi x \times \frac{330}{\pi x^2} + 2 \times \pi \times x^2$$

$$f(x) = \frac{660}{x} + 2\pi x^2 = \frac{660}{x} + \frac{2\pi x^3}{x} = \frac{660 + 2\pi x^3}{x}$$

$$f(x) = \frac{660 + 2\pi x^3}{x} = \frac{u}{v}$$

$$u = 660 + 2\pi x^3 \qquad u' = 6\pi x^2$$

$$v = x \qquad v' = 1$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{6\pi x^2 \times x - (660 + 2\pi x^3) \times 1}{x^2} = \frac{6\pi x^3 - 660 - 2\pi x^3}{x^2}$$

$$\text{donc } \quad f'(x) = \frac{4\pi x^3 - 660}{x^2}$$

$x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $4\pi x^3 - 660$

$$4\pi x^3 - 660 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4\pi x^3 > 660$$

$$\Leftrightarrow x^3 > \frac{660}{4\pi}$$

$$\Leftrightarrow x^3 > \frac{165}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \approx 3{,}745$$

x	0		$\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

L'aire est donc minimale pour un rayon $x = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \approx 3{,}745\ cm$ et elle vaut

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}\right) = \frac{660 + 2\pi\left(\frac{165}{\pi}\right)}{\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}} = \frac{660 + 330}{\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}} = 990\sqrt[3]{\frac{\pi}{165}} \approx 264{,}36\ cm^2$$

Exercice 2.

$x \in]0; 6[$ mesure en mètre de IM

$2AM + MH = 2\sqrt{AI^2 + IM^2} + (IH - IM) = 2\sqrt{25 + x^2} + 6 - x$

$$f: x \in]0; 6[\longmapsto f(x) = 2\sqrt{25 + x^2} + 6 - x$$

f est dérivable sur $]0; 6[$ et $\forall x \in]0; 6[$

$$f'(x) = \frac{2\times 2x}{2\sqrt{25 + x^2}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{25 + x^2}}{\sqrt{25 + x^2}}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > \sqrt{25 + x^2} \Leftrightarrow 4x^2 > 25 + x^2$ ou $4x^2 < -25 - x^2$ exclu

$\Leftrightarrow 3x^2 - 25 > 0$

$a = 3 > 0$ et $\Delta = 0 - 4\times 3\times(-25) = 300 > 0$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{300}}{6} = \frac{-5\sqrt{3}}{3} < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}89$$

x	0		$\frac{5\sqrt{3}}{3}$		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	16	$\searrow$	$5\sqrt{3} + 6$	$\nearrow$	

$$f\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{25 + \frac{25\times 3}{9}} + 6 - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3} + 6 - \frac{5\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3} + 6 \approx 14{,}66$$