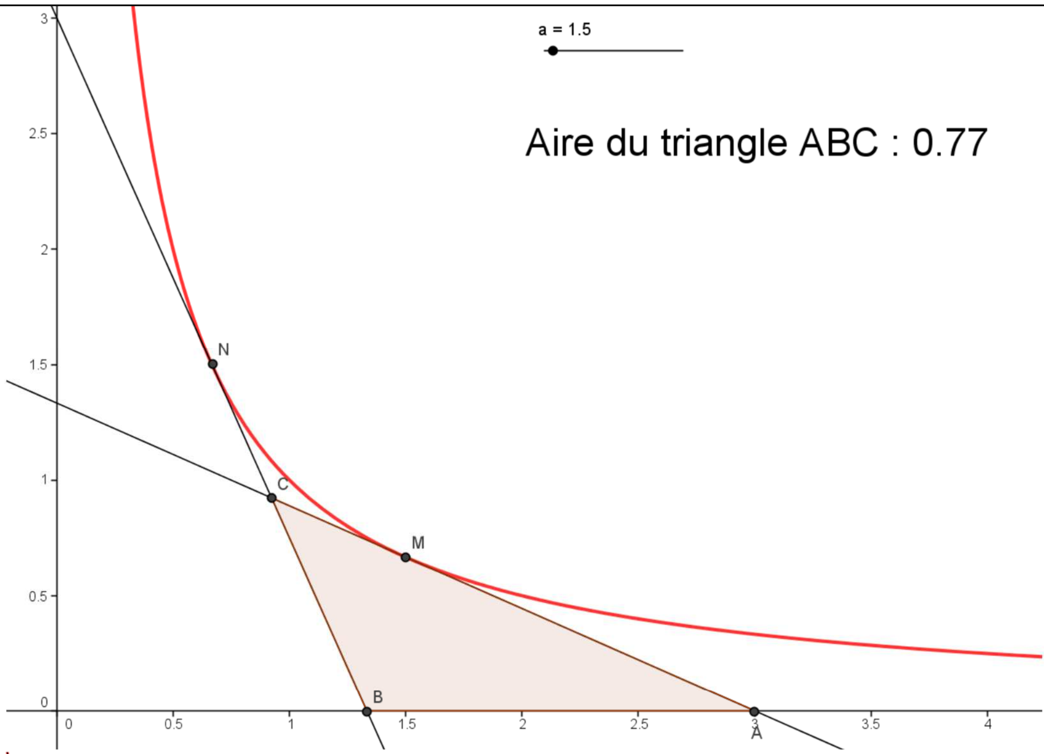
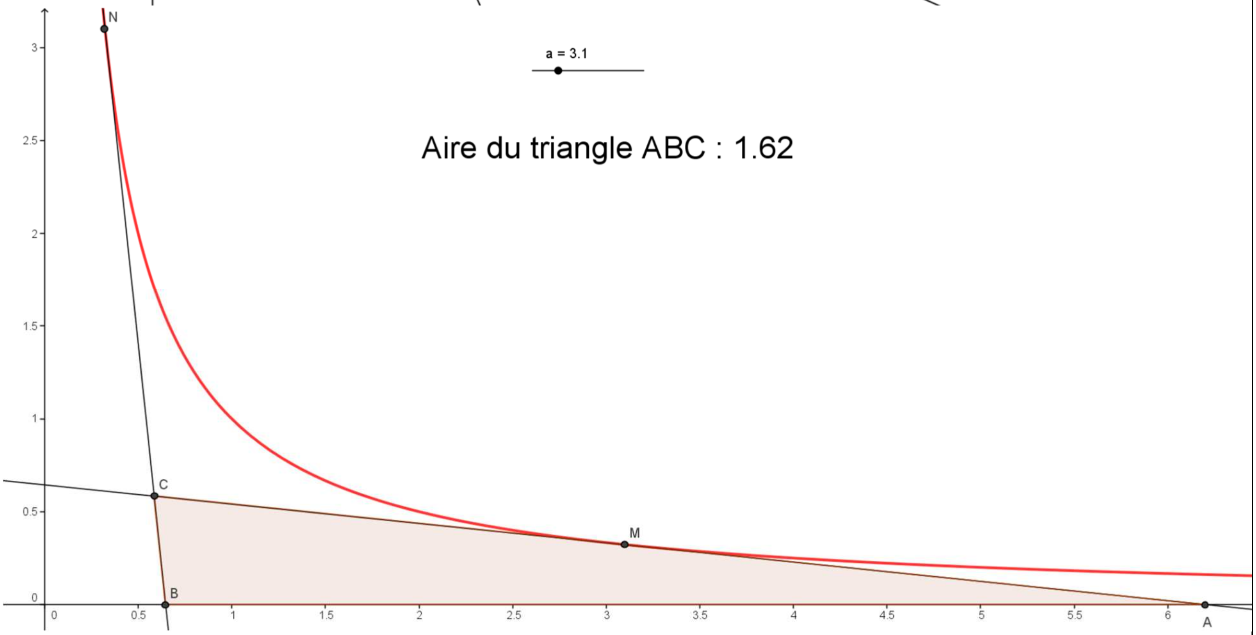
Exercice 1.	**1.**	Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n=\frac{6n}{3^n}$, démontrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}$. Initialisation : pour $n=0, \frac{6n}{3^n}=\frac{6\times 0}{3^0}=0=u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : Soit $p\in\mathbb{N}$ fixé, supposons que $\mathcal{P}(p)$ est vraie $i.e.\ u_p=\frac{6p}{3^p}$ On sait que $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. donc $u_{p+1}=\frac{1}{3}u_p+\frac{2}{3^p}=\frac{1}{3}\times\frac{6p}{3^p}+\frac{2}{3^p}=\frac{6p}{3^{p+1}}+\frac{2\times 3}{3^{p+1}}=\frac{6p+6}{3^{p+1}}=\frac{6(p+1)}{3^{p+1}}$ Par conséquent, $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. On a donc démontré que, $\forall n\in\mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie c'est à dire $u_n=\frac{6n}{3^n}$.
	2.	Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $3^n\geq n^2$ Initialisation : pour $n=2$, $3^2=9$ et $2^2=4$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie. Hérédité : Soit $p\in\mathbb{N}, p\geq 2$, fixé, supposons que $\mathcal{P}(p)$ est vraie $i.e.\ 3^P\geq p^2$ donc $3\times 3^P\geq 3\times p^2 \Leftrightarrow 3^{p+1}\geq 3p^2$, comparons $3p^2$ et $(p+1)^2$: $3p^2-(p+1)^2=3p^2-(p^2+2p+1)=2p^2-2p-1$ Etudions le signe du polynôme $2x^2-2x-1$: $\Delta=4-4\times(-2)=12>0$, Le polynôme a deux racines $x_1=\frac{2-\sqrt{12}}{4}<0$ et $x_2=\frac{2+\sqrt{12}}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}<2$ De plus $a=2>0$, donc le polynôme est positif à l'extérieur des racines. On en déduit que, puisque $p\geq 2, 2p^2-2p-1\geq 0$ et donc $3p^2\geq (p+1)^2$ Par conséquent, $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. On a donc démontré que, $\forall n\in\mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie c'est à dire $3^n\geq n^2$.
	3.	$\forall n\geq 2, 3^n\geq n^2>0 \Leftrightarrow \frac{1}{3^n}\leq\frac{1}{n^2}$ puisque $x\mapsto\frac{1}{x}$ est décroisssante sur $]0;+\infty[$ $\Leftrightarrow \frac{6n}{3^n}\leq\frac{6n}{n^2}$ car $6n>0$, on a alors $0\leq u_n\leq\frac{6}{n}$, pour tout $n\geq 2$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6}{n}=0$ donc d'aprèsle théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.
	4.	$u_7=\frac{14}{729}\approx 0{,}0192>10^{-2}$ et $u_8=\frac{16}{2187}\approx 0{,}0073<10^{-2}$. u_n sera inférieure à 10^{-2} mg.L^{-1} au bout de 8 heures soit à 20 heures.

Exercice 1.





Les points M et N ont pour coordonnées : $M\left(a;\frac{1}{a}\right)$ et $N\left(\frac{1}{a};a\right)$

$$\forall x \in \,]0;+\infty[,\quad f(x)=\frac{1}{x}\ \text{ donc }\ f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

L'équation de la tangente en a (c'est-à-dire en M) est :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)=\frac{-1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a}=\frac{-1}{a^2}x+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{-1}{a^2}x+\frac{2}{a}$$

L'intersection avec l'axe des abscisses est :

$$\frac{-1}{a^2}x+\frac{2}{a}=0 \Leftrightarrow \frac{-1}{a^2}x=-\frac{2}{a} \Leftrightarrow x=-\frac{2}{a}\times(-a^2)=2a$$

Donc les coordonnées de A sont $A(2a;0)$.

L'équation de la tangente en $\frac{1}{a}$ (c'est-à-dire en N) est :

$$y = f'\left(\frac{1}{a}\right)\left(x - \frac{1}{a}\right) + f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{-1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2}\left(x - \frac{1}{a}\right) + a = -a^2\left(x - \frac{1}{a}\right) + a$$

$$y = -a^2x + 2a$$

L'intersection avec l'axe des abscisses est :

$$-a^2x + 2a = 0$$

$$-a^2x = -2a$$

$$x = \frac{-2a}{-a^2} = \frac{2}{a}$$

Donc les coordonnées de B sont $B\left(\frac{2}{a};0\right)$.

Les coordonnées du point d'intersection des deux tangentes est :

$$y = \frac{-1}{a^2}x + \frac{2}{a} = -a^2x + 2a$$

$$\frac{-1}{a^2}x + a^2x = 2a - \frac{2}{a}$$

$$\frac{a^4 - 1}{a^2} \times x = \frac{2a^2 - 2}{a}$$

$$x = \frac{2a^2 - 2}{a} \times \frac{a^2}{a^4 - 1} = \frac{2a(a^2 - 1)}{(a^2 - 1)(a^2 + 1)} = \frac{2a}{a^2 + 1}$$

L'abscisse de C est $\frac{2a}{a^2+1}$

$$y = -a^2 \times \frac{2a}{a^2 + 1} + 2a = \frac{-2a^3 + 2a(a^2 + 1)}{a^2 + 1} = \frac{-2a^3 + 2a^3 + 2a}{a^2 + 1} = \frac{2a}{a^2 + 1}$$

Les coordonnées de C sont donc $C\left(\frac{2a}{a^2+1};\frac{2a}{a^2+1}\right)$.

On en déduit que

$$AB = 2a - \frac{2}{a} = \frac{2a^2 - 2}{a} \quad \text{et} \quad h = \frac{2a}{a^2 + 1}$$

L'aire est donc

$$\mathcal{A}(a) = \frac{AB \times h}{2} = \frac{\frac{2a^2 - 2}{a} \times \frac{2a}{a^2 + 1}}{2} = \frac{2a^2 - 2}{a^2 + 1} = \frac{a^2\left(2 - \frac{2}{a^2}\right)}{a^2\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)} = \frac{2 - \frac{2}{a^2}}{1 + \frac{1}{a^2}}$$

$$\lim_{a \to +\infty} \mathcal{A}(a) = \lim_{a \to +\infty} \frac{2 - \frac{2}{a^2}}{1 + \frac{1}{a^2}} = 2$$

L'aire du triangle ABC tend vers 2 lorsque a tend vers $+\infty$.