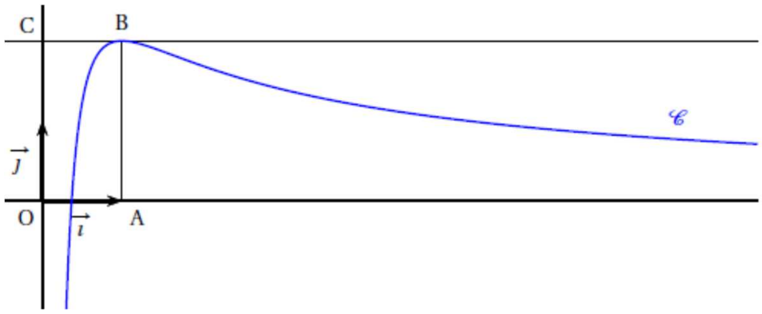
**Exercice de BAC :**




Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, la courbe représentative C d'une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On dispose des informations suivantes :

- les points $A$, $B$, $C$ ont pour coordonnées respectives $(1;0)$, $(1;2)$, $(0;2)$ ;
- la courbe C passe par le point $B$ et la droite $(BC)$ est tangente à C en $B$ ;
- il existe deux réels positifs $a$ et $b$ tels que pour tout réel strictement positif $x$, $f(x)=\frac{a+b\ln x}{x}$.

▶1. a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Vérifier que pour tout réel strictement positif $x$, $f'(x)=\frac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$.

c) En déduire les réels $a$ et $b$.

▶2. a) Justifier que pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b) Déterminer les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel $x$ strictement positif, $f(x)=\frac{2}{x}+2\frac{\ln x}{x}$.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction $f$.

▶3. a) Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]0,1]$.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel $\beta$ de l'intervalle $]1;+\infty[$ tel que $f(\beta)=1$. Déterminer l'entier $n$ tel que $n<\beta<n+1$.

▶4. On donne l'algorithme ci-dessous.

| | |
|---|---|
| Initialisation : | Affecter à $a$ la valeur 0.<br>Affecter à $b$ la valeur 1. |
| Traitement : | Tant que $b-a>0{,}1$<br>Affecter à $m$ la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.<br>Si $f(m)<1$ alors affecter à $a$ la valeur $m$.<br>Sinon affecter à $b$ la valeur $m$.<br>Fin de Si et fin de Tant que. |
| Sortie : | Afficher $a$ et $b$. |

a) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous.

| | **étape 1** | **étape 2** | **étape 3** | **étape 4** | **étape 5** |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{a}$ | 0 | | | | |
| $\boldsymbol{b}$ | 1 | | | | |
| $\boldsymbol{b-a}$ | | | | | |
| $\boldsymbol{m}$ | | | | | |

b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de $\beta$ d'amplitude $10^{-1}$.

**Exercice de recherche :**

On considère les représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme népérien. Existe-t-il des droites tangentes communes aux deux courbes ?