Exercice 1. — **7**

1.

$f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$

$\forall x > 0, f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$

$f'(x) = \dfrac{b \times \frac{1}{x} \times x - (a + b\ln x) \times 1}{x^2} = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2}$

$f(1) = 2 = \dfrac{a + b\ln 1}{1} = a$

$f'(1) = \dfrac{b - a - b\ln 1}{1^2} = b - a = 0 \Leftrightarrow a = b = 2$

2.

$\forall x > 0,\ \ f'(x) = \dfrac{-2\ln x}{x^2}$ et puisque $\dfrac{2}{x^2} > 0$ alors $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2 + 2\ln x}{x} = -\infty$

$\forall x > 0,\ \ f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x} = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty < 1$ et $f(1) = 2 > 1$

f étant continue et strictement croissante sur $]0{,}1]$ l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique notée α.

$f(5) = \dfrac{2 + 2\ln 5}{5} \approx 1{,}043 > 1$ et $f(6) = \dfrac{2 + 2\ln 6}{6} \approx 0{,}93 < 1$

donc $5 < \beta < 6$

	étape 1	**étape 2**	**étape 3**	**étape 4**	**étape 5**
$\boldsymbol{a}$	0	0	0,25	0,375	0,4375
$\boldsymbol{b}$	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$\boldsymbol{b - a}$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
$\boldsymbol{m}$	0,5	0,25	0,375	0,4375	

Les valeurs affichées par cet algorithme représentent un encadrement à 0,1 près de α l'unique solution de l'équation $f(x) = 1$ sur $]0{,}1]$.

Initialisation :	Affecter à a la valeur 5.
	Affecter à b la valeur 6.
Traitement :	Tant que $b - a > 0{,}1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$.
	Si $f(m) > 1$ alors affecter à a la valeur m.
	Sinon affecter à b la valeur m.
	Fin de Si et fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a et b.

Exercice 2. **3**

On note $f : x \longmapsto \ln x$ définie sur $]0;+\infty[$ et $g : x \longmapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f'(x) = \frac{1}{x}$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = e^x$.
Soit $a \in]0;+\infty[$, une tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a) = \frac{1}{a}(x-a) + \ln a = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a$
Soit $b \in \mathbb{R}$, une tangente à la courbe de g au point d'abscisse b a pour équation : $y = f'(b)(x-b) + f(b) = e^b(x-b) + e^b = e^b x + e^b(1-b)$
Si les deux courbes admettent des tangentes communes alors elles auront le même coefficient directeur donc $e^b = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = e^{-b} \Leftrightarrow b = \ln\frac{1}{a} = -\ln a$.
L'équation de la tangente à la courbe de f devient : $y = e^b x - 1 - b$
Si les deux courbes admettent des tangentes communes alors elles auront la même ordonnée à l'origine donc

$$e^b(1-b) = -1 - b \Leftrightarrow e^b(1-b) + 1 + b = 0$$

Etudions la fonction $h : x \longmapsto e^x(1-x) + 1 + x$ définie sur $\mathbb{R}$:
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h'(x) = e^x(1-x) - e^x + 1 = e^x - xe^x - e^x + 1 = 1 - xe^x$$

La fonction h' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h''(x) = -e^x - xe^x = e^x(-1-x) = -e^x(1+x)$$

donc $h''(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ et $h''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h''(x)$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$	1	$\nearrow$	$1+\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

$h'(-1) = 1 + e^{-1}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - xe^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - xe^x = -\infty$

h' est continue sur $\mathbb{R}$, $h'(-1) = 1 + \frac{1}{e} > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - xe^x = -\infty$ donc h admet au moins une racine notée α sur $]-1;+\infty[$, et h' est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$ donc cette racine est unique et $\alpha \approx 0{,}567$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e^\alpha + \alpha$	$\searrow$	$-\infty$

$$h'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha e^\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha = 1$$

$$h(\alpha) = e^\alpha(1-\alpha) + 1 + \alpha = e^\alpha + \alpha > 0$$

h est continue sur $\mathbb{R}$, $h(\alpha) > 0$,
$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ donc h admet au moins une racine notée α_1 sur $]-\infty;\alpha[$, et au moins une racine notée α_2 sur $]\alpha;+\infty[$ de plus h est strictement monotone sur $]\alpha;+\infty[$ et sur $]-\infty;\alpha[$ donc ces racines sont uniques : $\alpha_1 \approx 1{,}543$ et $\alpha_2 \approx -1{,}544$