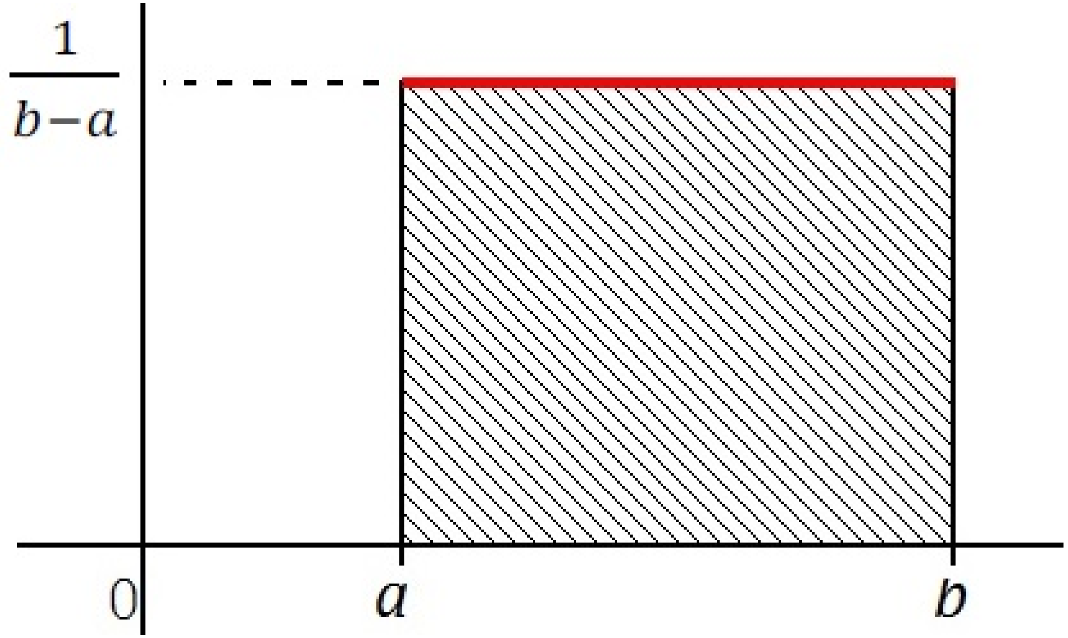
Propriété : densité d'une loi uniforme

Soit a et b deux réels tels que $a < b$

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ lorsque sa densité de probabilité est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$ sur $[a, b]$.



Démonstration :

X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.
Sa densité de probabilité est donc une fonction constante :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) = k \text{ une constante réelle}$$

$$\int_a^b f(t)dt = 1 = \int_a^b k dt = [kt]_a^b = kb - ka = k(b - a)$$

$$k(b - a) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{b - a}$$

donc $\forall x \in [a, b], \quad f(x) = \frac{1}{b-a}$ ■

Propriété : espérance d'une loi uniforme

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, on note f sa densité
X admet une espérance

$$\boldsymbol{E(X) = \int_a^b t \times f(t)dt = \frac{a+b}{2}}$$

Démonstration :

$$E(X)=\int_a^b t\times f(t)dt=\int_a^b t\times\frac{1}{b-a}dt=\frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b$$

$$E(X)=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}\ \blacksquare$$

Propriété de durée de vie sans vieillissement :

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, pour tous réels t et h positifs, $\boldsymbol{P_{T\geq t}(T \geq t+h) = P(T \geq h)}$.

Démonstration :

$$P_{T\geq t}(T \geq t+h) = \frac{P(T \geq t \text{ et } T \geq t+h)}{P(T \geq t)} = \frac{P(T \geq t+h)}{P(T \geq t)}$$

car $h \geq 0$

$$P(T \geq t) = 1 - \ P(T < t) = 1 - \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x} dx = 1 - \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^t$$

$$P(T \geq t) = 1 - \lambda \left(\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} - \frac{1}{-\lambda} \right) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$$

de la même façon : $P(T \geq t + h) = e^{-\lambda(t+h)}$

$$P_{T \geq t}(T \geq t + h) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T \geq h) \blacksquare$$

Propriété : espérance d'une loi exponentielle

Soit T une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ sur $[0;+\infty[$, on note f sa densité

T admet une espérance

$$\boldsymbol{E(T) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x t\times f(t)dt = \frac{1}{\lambda}}$$

Démonstration :

METHODE 1 en « devinant » une primitive :

$$E(T) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x t\times f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x t\times\lambda e^{-\lambda t}dt$$

On cherche une primitive de $\lambda t e^{-\lambda t}$ sous la forme

$F(t) = (mt + p)e^{-\lambda t}$

$F'(t) = me^{-\lambda t} - \lambda(mt + p)e^{-\lambda t} = (-\lambda mt - \lambda p + m)e^{-\lambda t}$

Par identification :

$$\begin{cases} -\lambda m = \lambda \\ -\lambda p + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{-\lambda}{\lambda} = -1 \\ p = \dfrac{-1}{\lambda} \end{cases}$$

$F(t) = \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$ est une primitive de $t \times \lambda e^{-\lambda t}$.

$$E(T) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t \times \lambda e^{-\lambda t} dt = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}\right]_0^x$$

$$E(T) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\lambda} - x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)$$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ car $\lambda > 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-\lambda x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \times \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} = 0$

donc $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ ■

METHODE 2 en intégrant par parties :

$$E(T) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\times f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\times\lambda e^{-\lambda t}dt$$

Soit $x > 0$,

$$\int_0^x \underbrace{\lambda t\times e^{-\lambda t}}_{\text{produit } u'\times v}\ dt$$

$$u' = e^{-\lambda t} \quad u = \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}$$
$$v = \lambda t \qquad v' = \lambda$$

La formule d'IPP est :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

$$\int_0^x \lambda t \times e^{-\lambda t} dt = \left[\lambda t \times \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^x - \int_0^x \lambda \times \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} dt$$

$$= \lambda x \times \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} - 0 - \left[\lambda \times \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}\right]_0^x$$

$$= -xe^{-\lambda x} - \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x = -xe^{-\lambda x} - \left(\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\int_0^x \lambda t \times e^{-\lambda t} dt = -xe^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ car $\lambda > 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-\lambda x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \times \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} = 0$

donc $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ ■

Propriété : Loi normale

Soit T une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$,

pour tout $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif $u_\alpha > 0$ tel que

$$\boldsymbol{P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1 - \alpha}$$

En particulier $\boldsymbol{u_{0,05} \approx 1,96}$ et $\boldsymbol{u_{0,01} \approx 2,58}$

Démonstration :

La fonction f est continue donc elle admet une primitive mais cette primitive n'est pas exprimable par les fonctions usuelles.

Pour tout u, par symétrie de la courbe de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$P(-u \leq T \leq u) = 2P(0 \leq T \leq u) = 2\int_0^u f(x)dx = 2F(u)$$

où F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
La fonction F est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ car $f(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

De plus $\lim\limits_{u \to +\infty} F(u) = \lim\limits_{u \to +\infty} \int_0^u f(x)dx = \frac{1}{2}$ donc

u	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$2F(u)$	$\mathbf{0} \nearrow \mathbf{1}$

Pour tout $\alpha \in]0;1[, \quad 1-\alpha \in]0;1[$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel positif $u_\alpha > 0$ tel que

$$2F(u_\alpha) = P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1-\alpha$$

De plus $2F$ étant monotone, le réel u_α est unique■

Espérance d'une loi normale

T suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, on note f sa densité

T admet une espérance

$$\boldsymbol{E(T) = \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 t \times f(t)dt + \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t \times f(t)dt = 0}$$

Démonstration :

$$E(T)=\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 t\times f(t)dt+\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\times f(t)dt$$

$$E(T)=\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 t\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$E(T)=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_x^0+\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{+\infty}$$

$$E(T)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-1}{\sqrt{2\pi}}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

$$E(T)=0+0=0\blacksquare$$

Intervalle de fluctuation asymptotique

Si X_n suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$, alors, pour tout α dans $]0;1[$ on a,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$$

$$\text{où } I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

et u_α désigne le nombre réel tel que $P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1-\alpha$ lorsque T suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

Démonstration ROC :

$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$

$E(X_n) = np$ et $\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$

D'après le théorème de Moivre-Laplace

La variable centrée réduite $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ vérifie pour tous réels a et b :

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \in [a,b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = P(a \leq T \leq b)$$

où $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

or pour tout α dans $]0;1[$, il existe un unique réel positif $u_\alpha > 0$

tel que $P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$

$$\lim_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$
$$= \lim_{n\to+\infty} P\left(np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} P\left(p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha \;\blacksquare$$

Exemple 1 :

D’après les lois génétiques de Mendel, certains croisements de différentes variétés de pois devraient donner des pois jaunes et verts dans une proportion égale à 3 pour 1.
Lors d’une expérience, on a obtenu un échantillon, que l’on peut considérer comme aléatoire, présentant 176 pois jaunes et 48 pois verts.
Ces résultats sont-ils cohérents avec la théorie de Mendel ?

Les conditions sont remplies car
$n = 224 \geq 30$, $np = 168 \geq 5$ et $n(1-p) = 56 \geq 5$

$$f=\frac{176}{176+48}=\frac{176}{224}\approx 0{,}7857$$

Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est

$$I=\left[\frac{3}{4}-1{,}96\frac{\sqrt{\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}}{\sqrt{224}};\frac{3}{4}+1{,}96\frac{\sqrt{\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}}{\sqrt{224}}\right]$$

$$=\left[\frac{3}{4}-1{,}96\frac{\sqrt{3}}{16\sqrt{14}};\frac{3}{4}+1{,}96\frac{\sqrt{3}}{16\sqrt{14}}\right]=[0{,}693\ ;\ 0{,}807]$$

donc $f\in I$ donc ce résultat est conforme

Remarque :

L'intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95% vu en 2nde était $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{\sqrt{224}};\frac{3}{4}+\frac{1}{\sqrt{224}}\right]=$ $[0{,}683;0{,}817]$

L'intervalle de fluctuation de la fréquence est moins précis que l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% ■

Exemple 2 :

Un grossiste a acheté 50000 clés USB à un fabriquant qui lui a certifié que 60% avait une capacité de 4 Go et 40% une capacité de 2 Go. Un technicien prélève au hasard 50 clés USB parmi lesquelles 23 ont une capacité de 4 Go.

Le technicien doit-il alerter son patron ?

Les conditions sont remplies car
$n = 50 \geq 30$, $np = 30 \geq 5$ et $n(1-p) = 20 \geq 5$

$$f=\frac{23}{50}=046$$

Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est

$$I=\left[0{,}6-1{,}96\frac{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4}}{\sqrt{50}};0{,}6-1{,}96\frac{\sqrt{0{,}6\times 0{,}4}}{\sqrt{50}}\right]$$
$$=[0{,}464\ ;\ 0{,}736]$$

donc $f\notin I$ donc ce résultat n'est pas conforme, on peut rejeter l'hypothèse selon laquelle 60% des clés USB ont une capacité de 4 Go.

Remarque :

L'intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95% vu en 2nde était $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,6-\frac{1}{\sqrt{50}};0,6+\frac{1}{\sqrt{50}}\right]=$ $[0,459;0,741]$

L'intervalle de fluctuation de la fréquence est moins précis que l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%. En particulier pour notre exemple il ne permettrait pas de rejeter l'hypothèse.■

Inclusion dans l'intervalle de seconde :

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% vérifie

$$\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}; p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

où $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}; p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est l'intervalle de fluctuation utilisé en 2nde.

Démonstration :

La fonction $f\,:p \in [0;1] \longmapsto p(1-p) = -p^2+p$

$$f'(p) = -2p+1 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

f admet un maximum atteint pour $p=\frac{1}{2}$ et qui vaut $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

donc pour tout p

$$0 \leq p(1-p) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1{,}96\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1{,}96}{2} < 1$$

donc $p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < p + \frac{1}{\sqrt{n}}$

De la même façon $p - \frac{1}{\sqrt{n}} < p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ ■

Estimation

Pour une valeur de p fixée, l'intervalle $\left[\boldsymbol{F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}}\right]$

contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Démonstration (ROC) :

$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$

$E(X_n) = np$ et $\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$

D'après le théorème de Moivre-Laplace

La variable centrée réduite $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ vérifie pour tous réels a et b :

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \in [a,b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = P(a \leq T \leq b)$$

où $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$

En particulier

$$\lim_{n\to+\infty} P(-2 \leq Z_n \leq 2) = P(-2 \leq Z \leq 2) \geq 0{,}9544 > 0$$

Donc pour n assez grand, $P(-2 \leq Z_n \leq 2)$ sera très proche de 0,9544

Par exemple avec $\varepsilon = 0{,}0004$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N_0$

$$0{,}954 \leq P(-2 \leq Z_n \leq 2) \leq 0{,}9548$$

$$P(-2 \leq Z_n \leq 2) \geq 0{,}95$$

$$P\left(-2 \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 2\right) \geq 0{,}95$$

$$P\left(np - 2\sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + 2\sqrt{np(1-p)}\right) \geq 0,95$$

$$P\left(p - \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95$$

Or $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$ pour tout $p \in [0,1]$

donc $\left[p - \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

et donc $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$

et enfin $P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0,95$ ■