

John Neper (1550 - 1617)



Théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais. Il établit quelques formules de trigonométrie sphérique, popularisa l'usage du point pour la notation anglo-saxonne des nombres décimaux mais surtout inventa les logarithmes. Son objectif était de simplifier les calculs trigonométriques nécessaires en astronomie.

I. Le logarithme népérien

Définition.

La fonction **logarithme népérien**, notée \ln , est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ qui, à tout nombre réel $y > 0$, associe l'unique solution de l'équation $e^x = y$. On note $x = \ln(y)$.

$$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto \ln(y) = x \iff y = e^x$$

Exemple 1.

Calculer $\ln 1$, $\ln e$ et $\ln \frac{1}{e}$

Propriété.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $e^{\ln x} = x$.

On dit que les fonctions \exp et \ln sont **récioproques** l'une de l'autre.

Conséquence graphique :

Dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Théorème.

La fonction logarithme est **strictement croissante sur $]0, +\infty[$.**

Conséquences.

Pour tous nombres réels a et b , $a > 0$ et $b > 0$

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$$

$$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

Exemple 2.

Résoudre

a) $\ln x = -3$

b) $e^x = 4$

c) $\ln(2x + 1) < 2$

II. Relation fonctionnelle

Théorème.

Pour tout $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

i.e. $x \mapsto \ln x$ transforme un produit en somme.

Propriétés.

Pour tout $a > 0$, $b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n \times \ln(a) \quad \text{et} \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln(a)$$

Exemple 3.

Résoudre, dans \mathbb{R} , l'inéquation $\ln(x + 2) + \ln(x + 10) \leq 2 \ln(3)$

III. Etude de la fonction ln

Propriété :

La fonction ln est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$
et pour tout $x > 0$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Propriété :

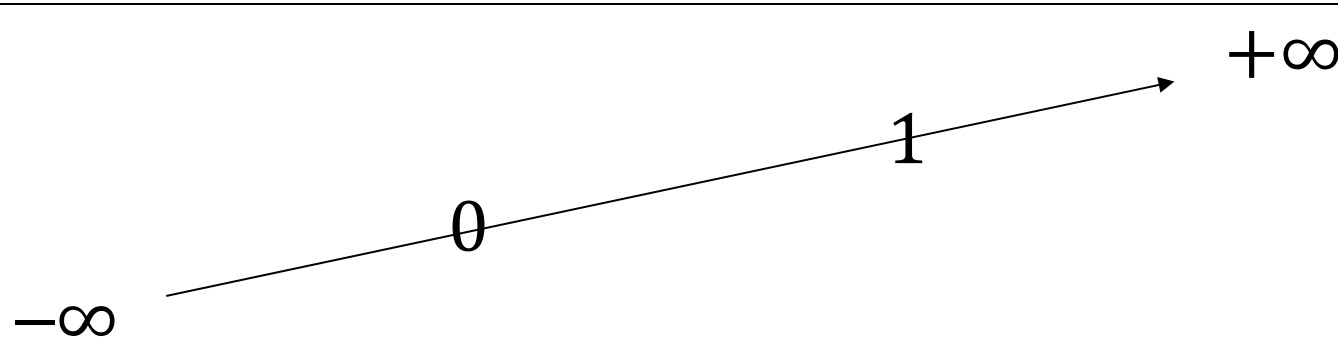
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Théorème.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de $x \mapsto \ln x$.

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'x = \frac{1}{x}$			+	
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



IV. Fonction $x \mapsto \ln(u(x))$

Théorème (admis)

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et telle que pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$

Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ notée $\ln u$ est définie et dérivable sur I et

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Exemple 4.

Soit $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$ définie sur \mathbb{R} . Déterminer $f'(x)$.

V. Croissance comparée

Théorème de croissance comparée.

Soit $x \in]0; +\infty[$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

Exemple 5.

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$$

VI. D'autres logarithmes ...

Définition.

On appelle **fonction logarithme décimal** la fonction définie sur

$$]0, +\infty[\text{ par : } \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\log 1 = \dots$$

$$\log 10 = \dots$$

$$\log 10^2 = \dots$$

$$\log 10^3 = \dots$$

$$\log 10^4 = \dots$$

Plus généralement : $\log 10^p = p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$