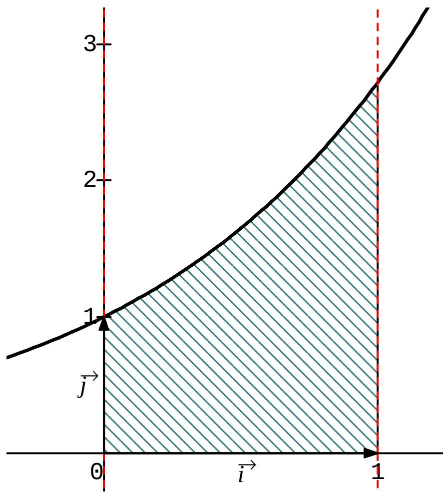
Problème :

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté C la courbe représentative de la fonction $f(x) = e^x$ dans le repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.



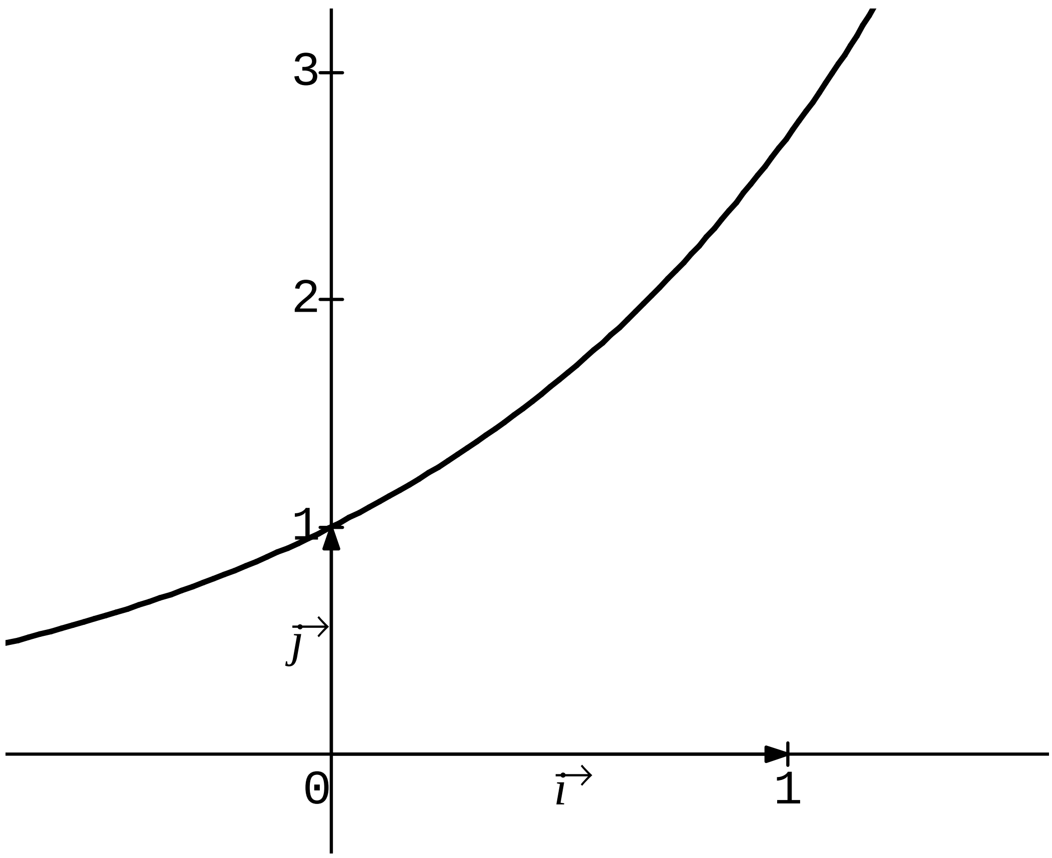
Combien vaut l'aire A du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$?

On subdivise l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$, sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ on construit deux rectangles m_k et M_k de longueur respective $f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

On note T_n la somme des aires des rectangles m_k et S_n la somme des aires des rectangles M_k où $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

Représentez et calculez T_4 et S_4. En déduire un encadrement de l'aire A.



Correction :

On découpe l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de taille $\frac{1}{n}$.

Pour tout $k \in \{0;1;2;\dots;n-1\}$, sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ on construit deux rectangles m_k et M_k de longueur respective $e^{\frac{k}{n}}$ et $e^{\frac{k+1}{n}}$.

On note T_n la somme des aires des rectangles m_k et S_n la somme des aires des rectangles M_k où $k \in \{0;1;\dots;n-1\}$.

$$T_n = \frac{1}{n}\times e^0 + \frac{1}{n}\times e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\times e^{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n}\times e^{\frac{3}{n}} + \cdots + \frac{1}{n}\times e^{\frac{n-2}{n}} + \frac{1}{n}\times e^{\frac{n-1}{n}}$$

$$T_n = \frac{1}{n}\times\left(1 + e^{\frac{1}{n}} + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^3 + \cdots + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\right)$$

$$T_n = \frac{1}{n}\times\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\times\frac{1-e^{\frac{n}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)}\times(1-e) = \frac{1}{\frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}}\times(1-e)$$

or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{x} = -1$

donc $\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = e-1}$

$$S_n = \frac{1}{n}\times e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\times e^{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n}\times e^{\frac{3}{n}} + \cdots + \frac{1}{n}\times e^{\frac{n-2}{n}} + \frac{1}{n}\times e^{\frac{n-1}{n}} + \frac{1}{n}\times e^{\frac{n}{n}}$$

$$S_n = \frac{1}{n}\times\left(e^{\frac{1}{n}} + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^3 + \cdots + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n}\right)$$

$$S_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\times\left(1 + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^1 + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \cdots + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\right)$$

$$S_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\times\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\times\frac{1-e^{\frac{n}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)}\times(1-e) = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}}\times(1-e)$$

or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{x} = -1$

donc $\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = e-1}$