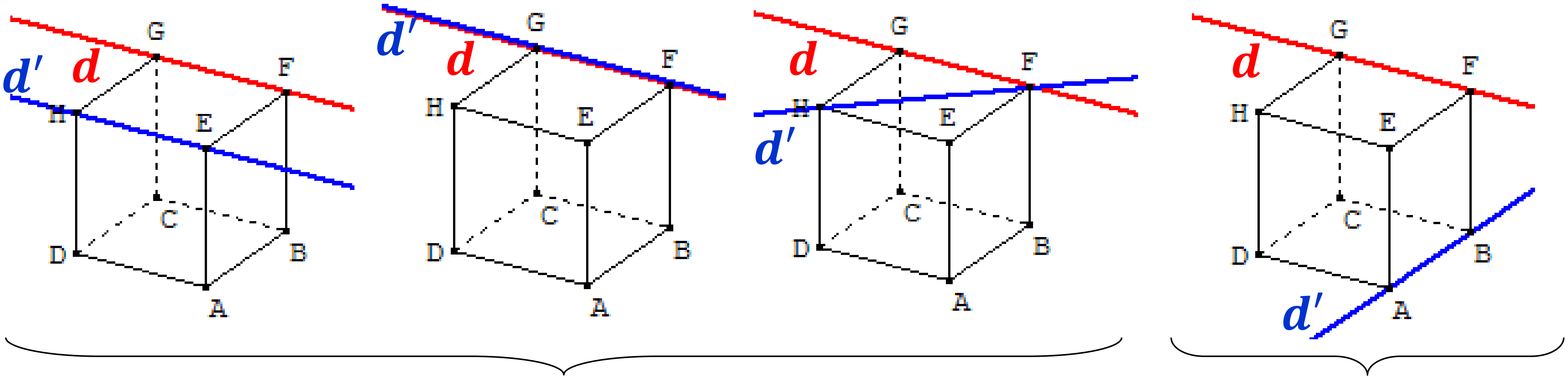
Gaspard Monge (1746 - 1818)

Mathématicien français dont l'œuvre considérable mêle géométrie descriptive, analyse infinitésimale et géométrie analytique. Il joue un grand rôle dans la Révolution française, tant du point de vue politique que du point de vue de l'instauration d'un nouveau système éducatif : il participe à la création de l'École normale et de l'École polytechnique.

I. Droites et plans

Propriété : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.

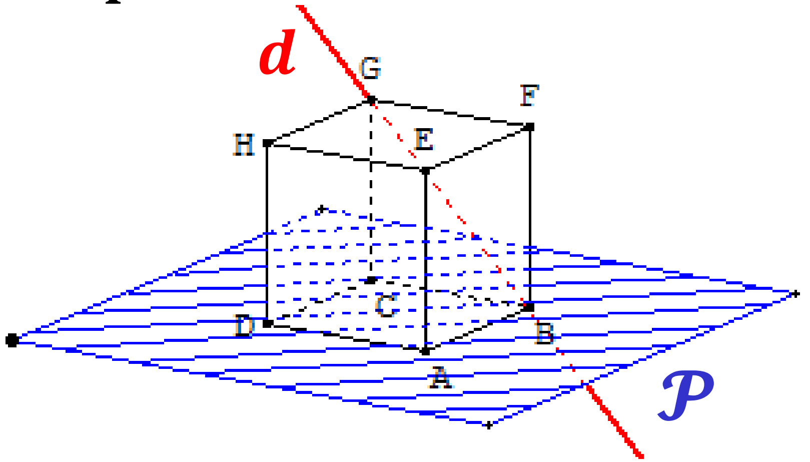


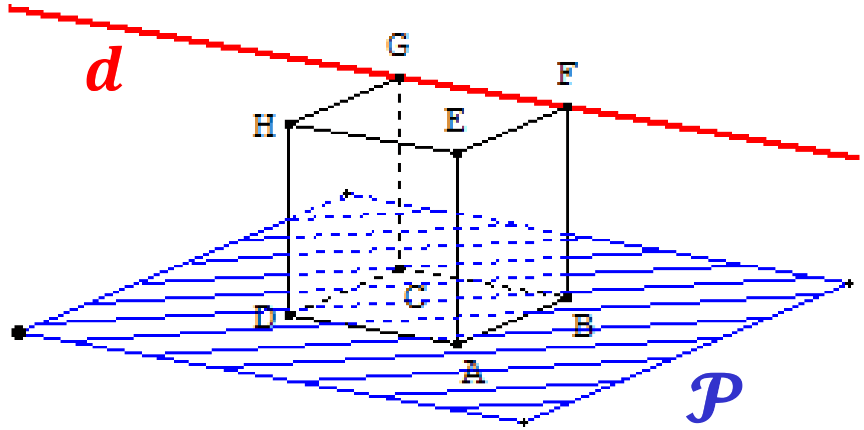
coplanaires

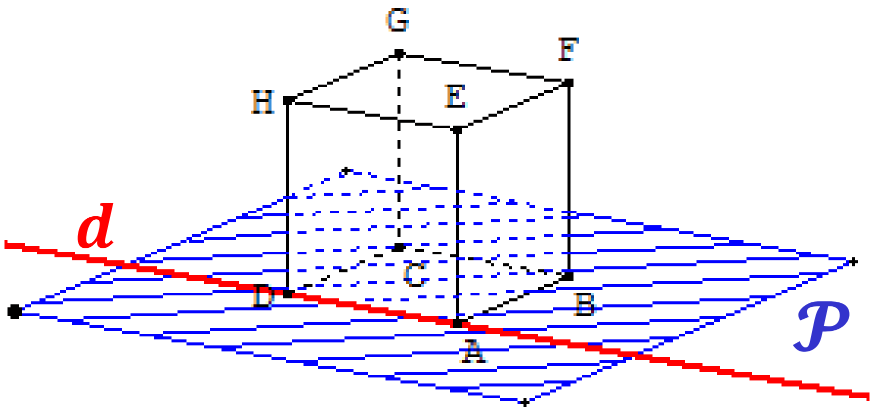
non coplanaires

Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont non-sécantes et coplanaires.

Propriété : Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

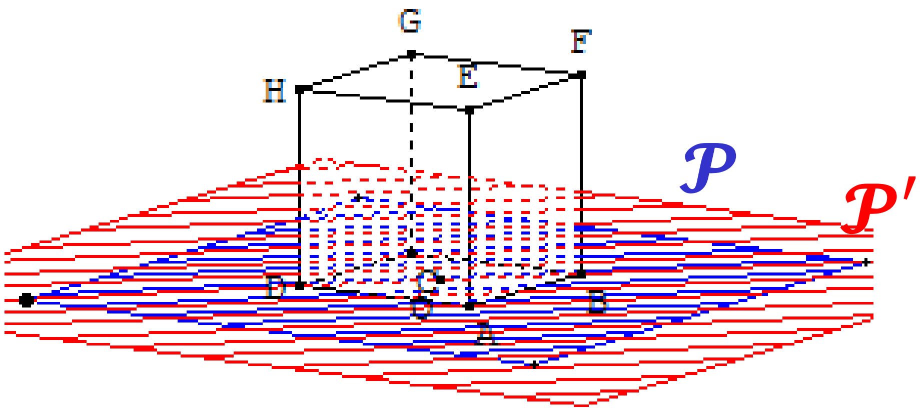


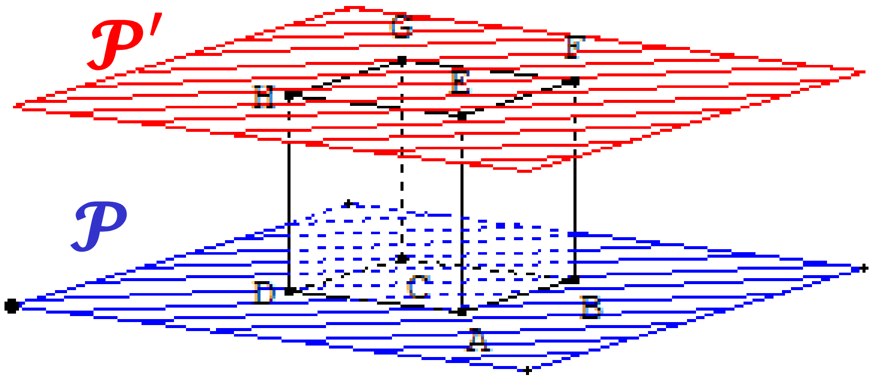


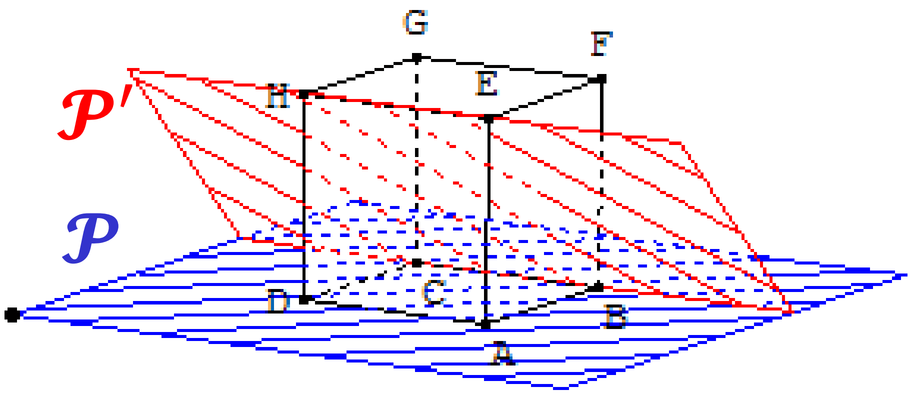


Une droite et un plan sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants.

Propriété : Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.





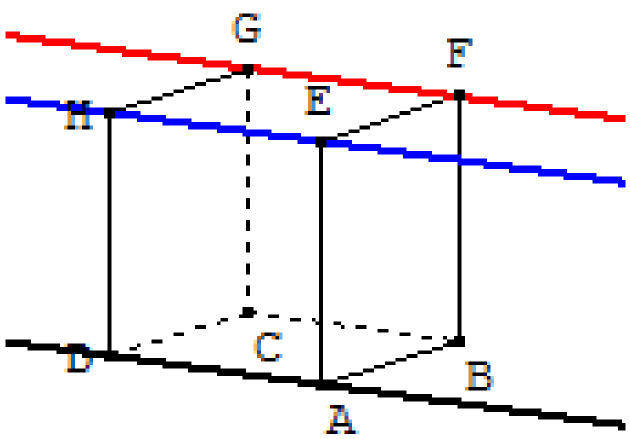


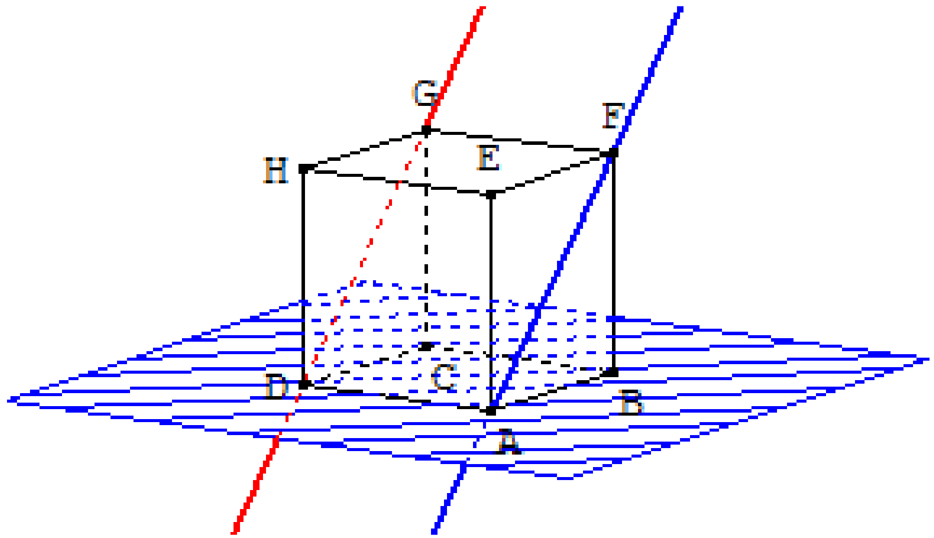
Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants.

Propriétés :

❶ Si deux droites sont parallèles alors toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

❷ Si deux droites sont parallèles alors tout plan sécant à l'une est sécant à l'autre.



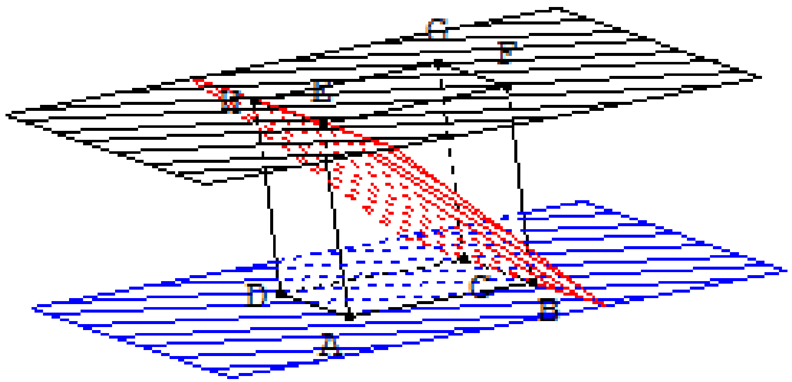


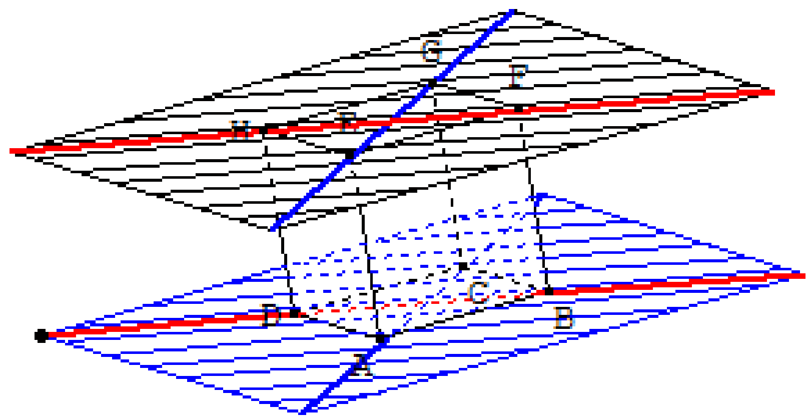
Propriétés :

❶ Si deux plans sont parallèles alors tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

❷ Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

❸ Si deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$ sont parallèles à deux sécantes d'un plan $\mathcal{P}'$ alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

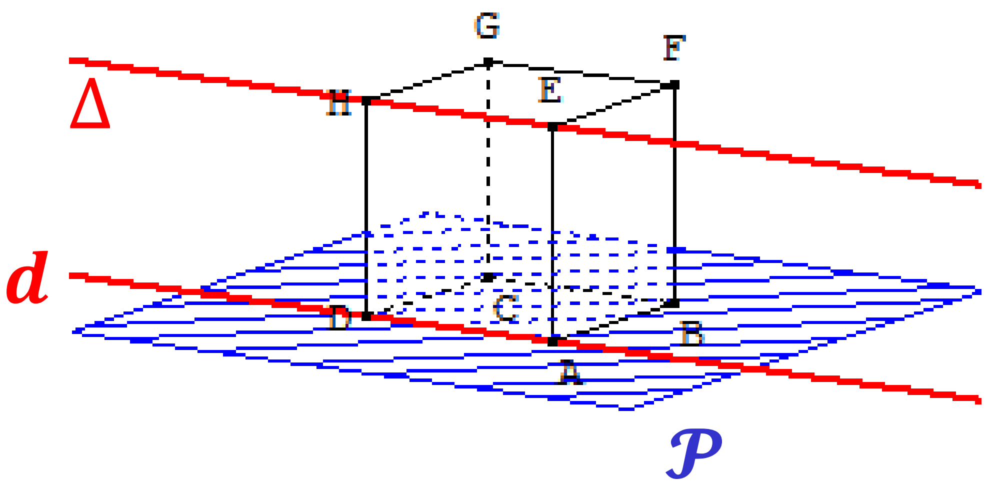


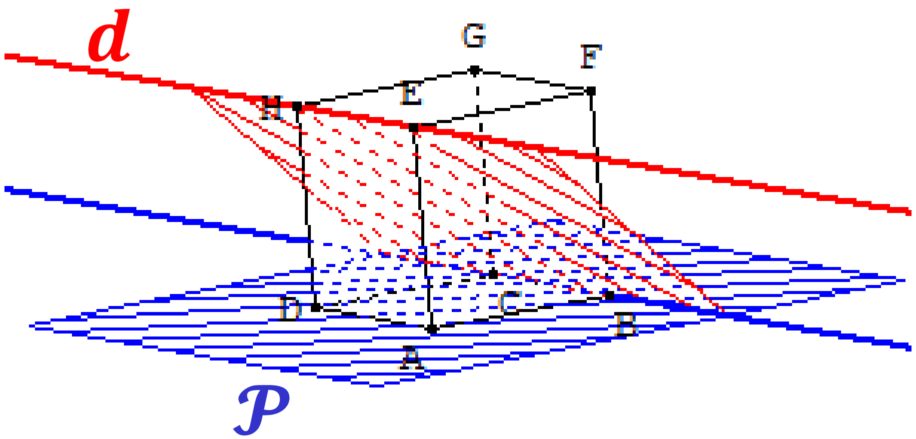


Propriétés :

❶ Si un plan $\mathcal{P}$ contient une droite d parallèle à une droite Δ alors $\mathcal{P}$ et Δ sont parallèles.

❷ Si une droite d et un plan $\mathcal{P}$ sont parallèles alors tout plan contenant d et sécant à $\mathcal{P}$, coupe $\mathcal{P}$ selon une droite parallèle à d.

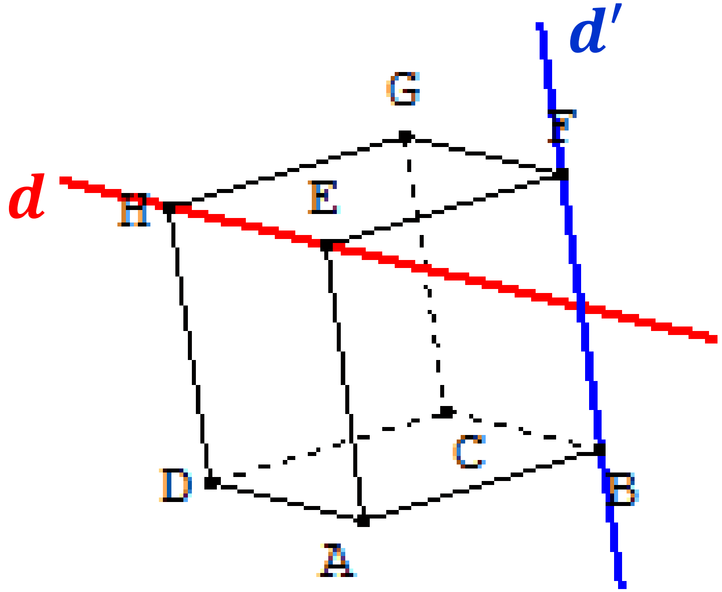


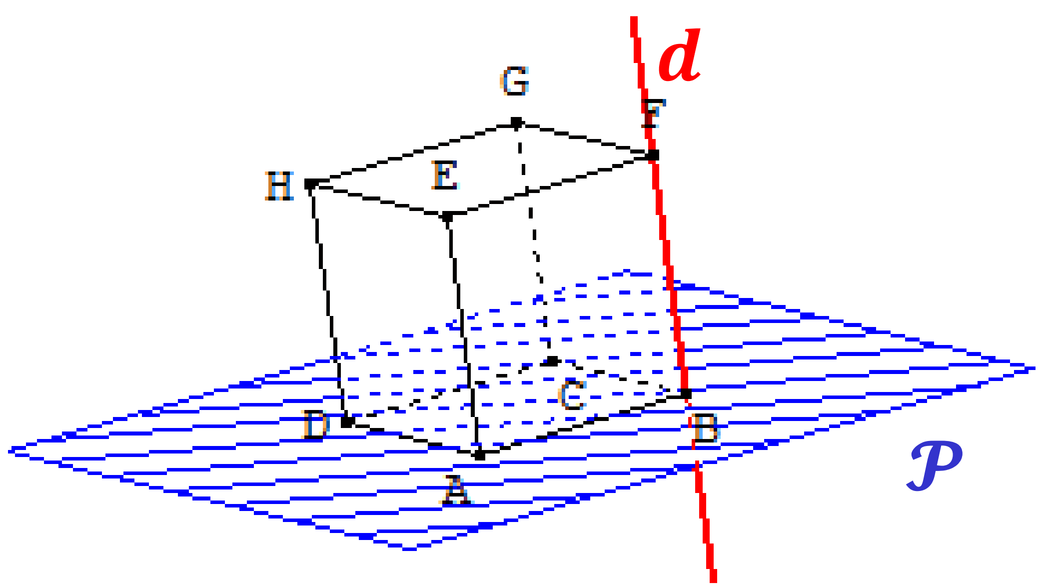


Définition :

❶ Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles menées d'un point quelconque sont perpendiculaires.

❷ Une droite est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ lorsque qu'elle est orthogonale à toutes les droites du plan $\mathcal{P}$.

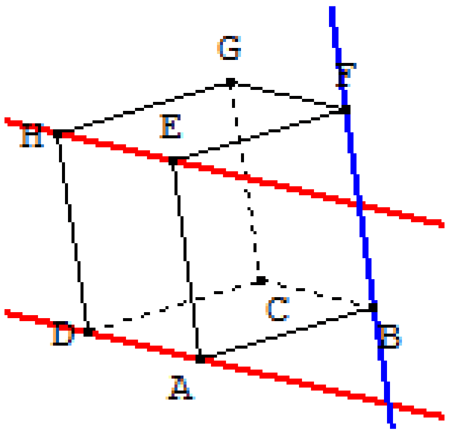


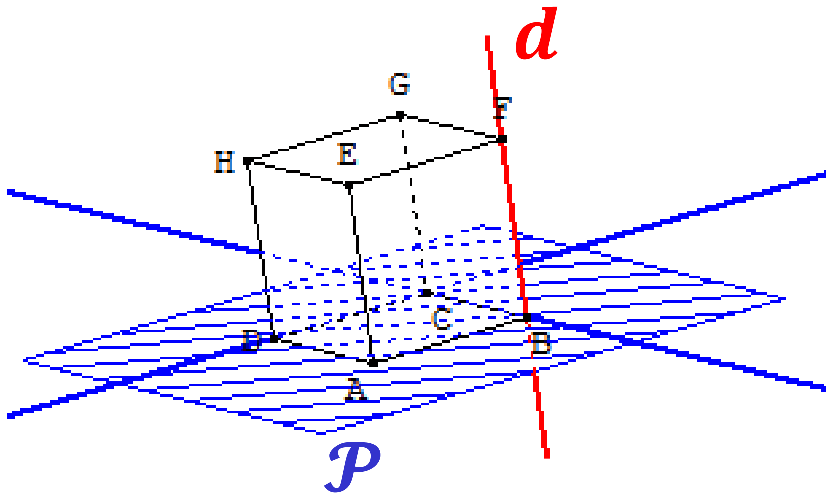


Propriétés :

❶ Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

❷ Une droite d est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

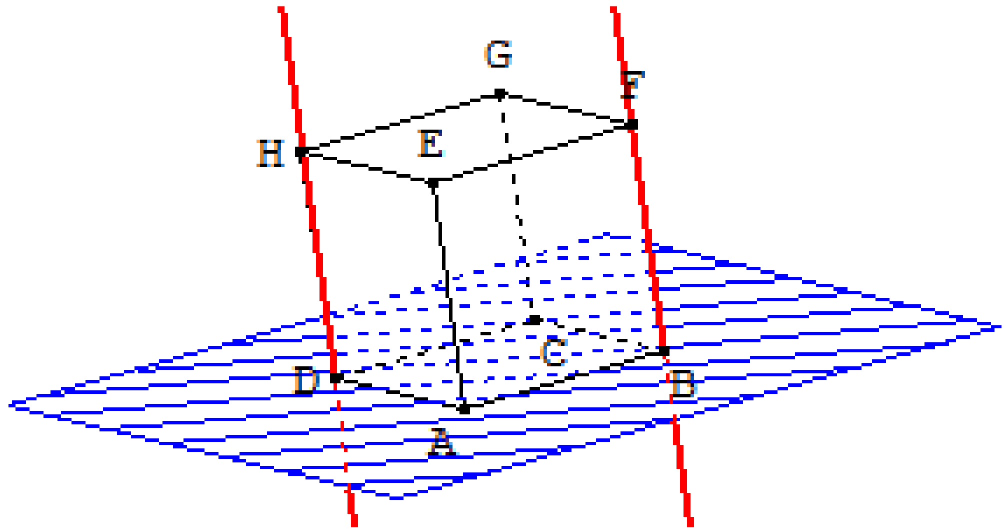




Propriétés :

❶ Si deux droites sont parallèles alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

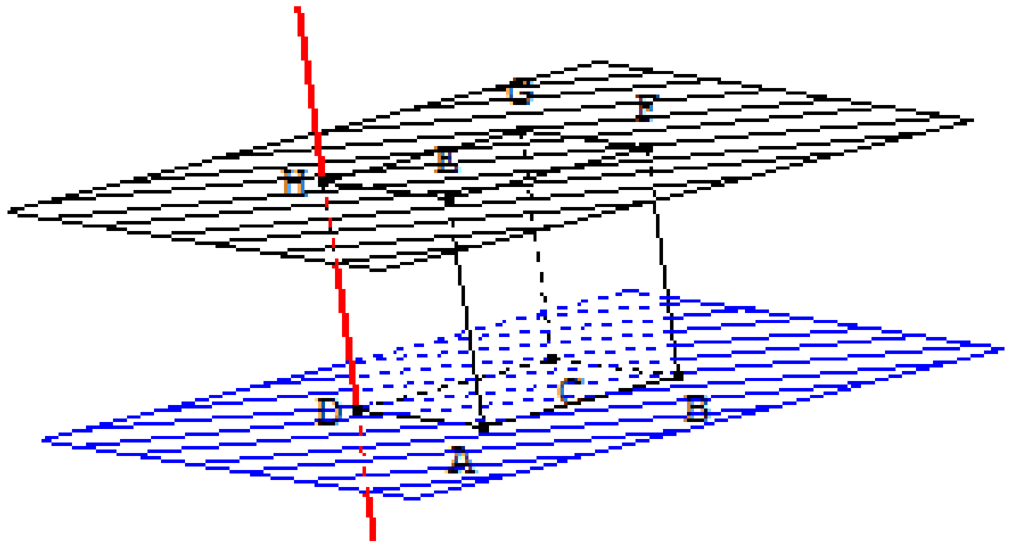
❷ Si deux droites sont orthogonales au même plan alors elles sont parallèles entre elles.



Propriétés :

❶ Si deux plans sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

❷ Si deux plans sont orthogonaux à une même droite alors ils sont parallèles entre eux.

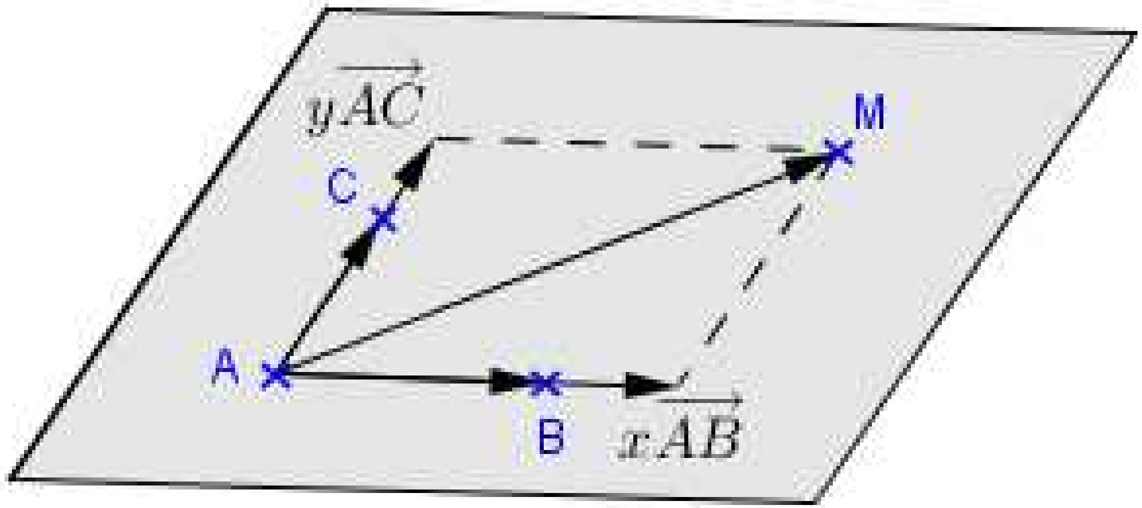


II. Géométrie vectorielle

Propriété :

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace, $\mathcal{P}$ est le plan (ABC).

Le point ***M* appartient au plan *$\mathcal{P}$*** si, et seulement si, il existe deux nombres réels x et y tels que $\boldsymbol{\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}}$.



Remarque :

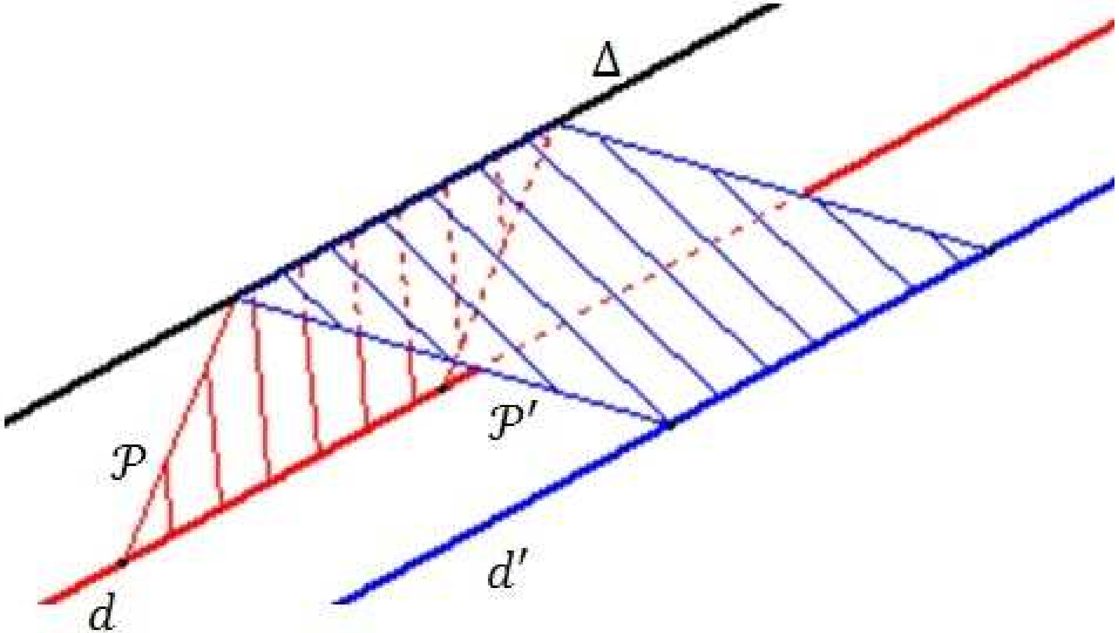
De façon générale, un plan est défini par **un point O et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires**.
Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des **vecteurs directeurs** de ce plan
$(O;\vec{i};\vec{j}\,)$ est un **repère** du plan.

Propriété :

Deux plans qui ont deux vecteurs directeurs en commun sont parallèles.

Théorème du toit :

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans sécants suivant une droite Δ.
Si d une droite de $\mathcal{P}$ et d' une droite de $\mathcal{P}'$ sont parallèles alors Δ est parallèle à d et d'.



Démonstration (ROC) :

Définition :

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** lorsqu'il existe trois nombres réels x, y et z non tous nuls tels que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$.

Remarque :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{w} = -\frac{x}{z}\vec{u} - \frac{y}{z}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Théorème :

Quatre points A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Propriété :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace

Pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe un unique triplet $(a; b; c)$ de nombres réel tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont alors les **coordonnées du vecteur** $\boldsymbol{\vec{t}}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Définition :

Un repère de l'espace noté $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\,; \vec{k}\,\right)$ est formé d'un point O et de trois vecteurs non coplanaires.

Propriété :

$\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\,; \vec{k}\,\right)$ un repère de l'espace

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.
x est l'abscisse de M, y son ordonnée et z sa **cote**.

Calculs :

❶ Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$

et $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

et si le repère est orthonormé, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

❷ Si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

et $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ est le milieu de $[AB]$.

III. Le produit scalaire dans l'espace

Définition :

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est le nombre réel noté $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}}$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$$

En particulier :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - CB^2)$$

Remarque :

On étend aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan.

Propriétés :

❶ $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}$

❷ Si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) alors

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Propriétés :

❶ Dans un repère orthonormé de l'espace :

$$\text{Si } \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

❷ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $\qquad (k\vec{u}).\vec{v} = k\times\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v})$

$$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** lorsque $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 0}$.

IV. Représentations paramétriques

Théorème :

Soit Δ la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$M(x; y; z)$ appartient à la droite Δ si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t\vec{u}\begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$

Ce système est une **représentation paramétrique** de la droite Δ et t est le paramètre de cette représentation.

Théorème :

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs non colinéraires $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

$M(x; y; z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe deux réels t et t' tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$

Ce système est une **représentation paramétrique** du plan $\mathcal{P}$.

V. Equations cartésiennes

Propriété :
Deux droites d et d' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Définition :
Un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal à un plan** $\mathcal{P}$ lorsque toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Propriété :

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Définition :

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteur normaux respectifs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont **perpendiculaires** lorsque $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 0$.

Propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé

❶ Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

❷ Réciproquement a, b, c trois nombres réels non tous nuls et d un réel, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration (ROC) :

Rappel :

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

Propriété :

Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Démonstration (ROC) :