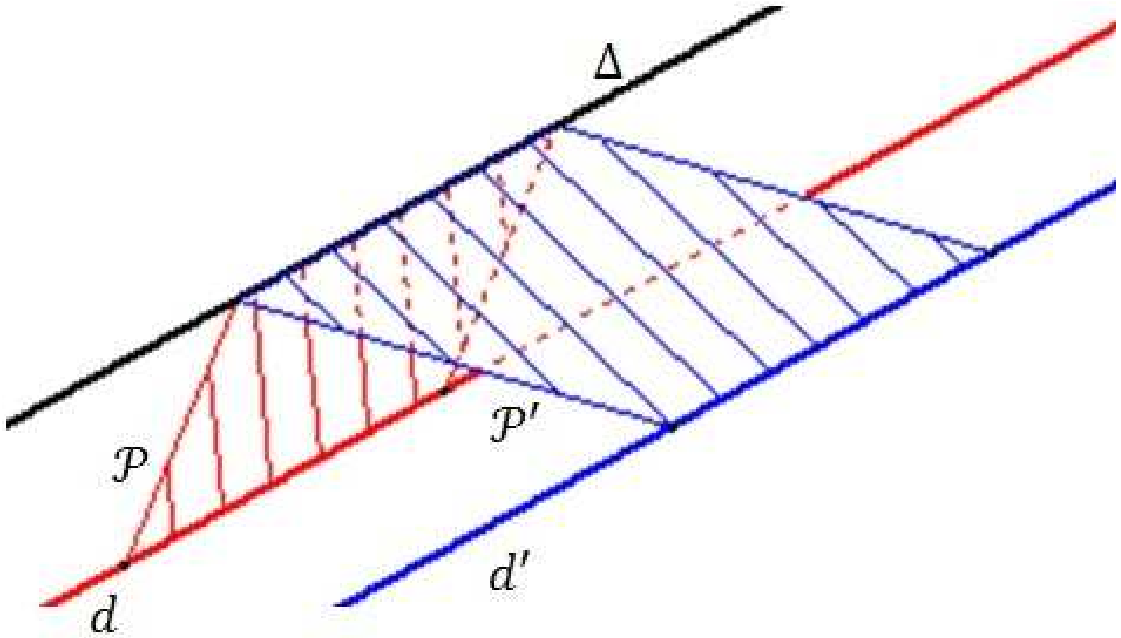
Théorème du toit :

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans sécants suivant une droite Δ.
Si d une droite de $\mathcal{P}$ et d' une droite de $\mathcal{P}'$ sont parallèles alors Δ est parallèle à d et d'.



Démonstration (ROC) :

On note $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de d et d'.
On démontre que Δ est parallèle à d et d' en raisonnant par l'absurde. On suppose donc que Δ n'est pas parallèle à d.
Dans ce cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont alors deux vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$.
De la même façon, Δ n'est pas parallèle à d' donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont alors deux vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}'$.
Par conséquent, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ possèdent deux vecteurs directeurs en commun, ils sont donc parallèles. Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite de plans sécants.
Par conséquent, Δ est parallèle à d et d' ■

Propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé

❶ Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

❷ Réciproquement a, b, c trois nombres réels non tous nuls et d un réel, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

$ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration (ROC) :

❶ Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et passant par $A(x_A; y_A; z_A)$.

Soit $M(x; y; z) \in \mathcal{P}$ alors $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)$$

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

❷ Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que

$$ax+by+cz+d=0$$

Si $a\neq 0$,

$A\left(-\frac{d}{a};0;0\right)$ vérifie $ax+by+cz+d=0$

donc $A\in\mathcal{P}$

posons $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\begin{pmatrix}x+\frac{d}{a}\\y\\z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a\left(x+\frac{d}{a}\right)+bx+cz=ax+d+bx+cz=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc $\mathcal{P}$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Si $a = 0$ alors soit $b \neq 0$ soit $c \neq 0$
On reprend la démonstration avec

$$A\left(0; -\frac{d}{b}; 0\right) \text{ ou } A\left(0; 0; -\frac{c}{b}\right) \blacksquare$$

Propriété :

Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Démonstration (ROC) :

Condition Nécessaire évidente

Condition Suffisante :

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ orthogonale à

d_1 et d_2 deux droites sécantes de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

Soit Δ de vecteur directeur $\vec{v}$, une droite quelconque du plan
Les vecteurs $\vec{v}$, $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont coplanaires donc il existe a et b deux réels tels que $\vec{v} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}$
On a alors

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}) = a\vec{u}.\overrightarrow{u_1} + b\vec{u}.\overrightarrow{u_2} = 0$$

donc d est orthogonale à Δ■