

EXERCICE 1. (7 points)

► 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est-elle inversible ? Justifier votre réponse.
- Donner l'inverse de la matrice A .

► 2. Pour se rendre à son travail, une personne emprunte une route qui monte sur x km, puis descend sur y km. Sa vitesse moyenne en montée est de 60 km.h^{-1} , et en descente de 90 km.h^{-1} . Elle met alors 12 minutes pour arriver sur son lieu de travail, et 13 minutes le soir pour rentrer chez elle.

- Traduire les données de l'énoncé par un système d'équations.
- Ecrire le système sous la forme $A \times X = B$ où les matrices B et X sont à préciser.
- En déduire la distance entre le domicile et le lieu de travail de cette personne.

EXERCICE 2. (6 points)

► 1. Si on divise un entier naturel n par 97, le reste est 2 mais si on divise ce nombre par 91, le quotient augmente de 1 et le reste est 1. Quel est cet entier naturel n ?

- R.O.C : Démontrer que si a divise b et a divise c alors a divise $3b - 2c$.
- Déterminer les entiers naturels n tel que $2n - 3$ divise $3n + 1$.

EXERCICE 3. (7 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbb{R}^*$.

- Pour quelle(s) valeurs de t , la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t - 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Justifier votre réponse.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}^*, t \neq 1$
 - Donner l'inverse de la matrice P , calculer $D = P^{-1}AP$ et en déduire D^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$.
 - En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n .