Exercice 1.	1.	La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible car le déterminant $3 \times 3 - 2 \times 2 = 5 \neq 0$.	1
		L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est alors $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$	2
	2.	A l'aller, la personne monte x km à 60 km.h^{-1}, le temps mis pour la montée sera alors de x minutes, puis elle descend y km à 90 km.h^{-1}, le temps mis pour la descente sera alors de $\frac{60y}{90} = \frac{2}{3}y$ minutes. On obtient alors pour le temps total, à l'aller, $x + \frac{2}{3}y = 12 \Leftrightarrow 3x + 2y = 36$. Avec le même raisonnement, pour le retour, on obtient alors, $y + \frac{2}{3}x = 13 \Leftrightarrow 2x + 3y = 39$ d'où le système : $\begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ 2x + 3y = 39 \end{cases}$	4
		On a alors : $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 39 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $A \times X = B$ où $B = \begin{pmatrix} 36 \\ 39 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.	
		D'après la question 1, la matrice A est inversible donc $A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 36 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ On en déduit que $x = 6$ et $y = 9$ et donc que la distance entre le domicile et le lieu de travail de cette personne est de 15 km.	
Exercice 2.	1.	$n = 97 \times q + 2 = 91 \times (q + 1) + 1$ $97q + 2 = 91q + 91 + 1$ $97q - 91q = 92 - 2$ $6q = 90$ $q = \frac{90}{6} = 15$ On en déduit que le nombre $n = 97 \times q + 2 = 1457$.	2
	2.	Supposons que a divise b donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$ Supposons, de plus, que a divise c donc, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = k'a$ alors $3b - 2c = 3ka - 2k'a = (3k - 2k')a$ or $3k - 2k' \in \mathbb{Z}$ donc a divise $3b - 2c$.	2

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>

$2n-3$ divise $3n+1$ et $2n-3$ divise $2n-3$ donc $2n-3$ divise

$$3(2n-3)-2(3n+1)=6n-9-6n-2=-11$$

Les diviseurs de -11 sont $\{1;-1;11;-11\}$.

<table>
<tr>
<td>$2n-3=1$
$2n=4$
$n=2$</td>
<td>$2n-3=-1$
$2n=2$
$n=1$</td>
<td>$2n-3=11$
$2n=14$
$n=7$</td>
<td>$2n-3=-11$
$2n=-8$
$n=-4$
exclu</td>
</tr>
</table>

</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 3.</td>
<td>1.</td>
<td>

La matrice $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & t-1\end{pmatrix}$ est inversible lorsque son déterminant

$$1\times(t-1)-0\times 2=t-1\neq 0$$

donc pour $t\neq 1$.

</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>

Pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, $t\neq 1$, l'inverse de P est $P^{-1}=\frac{1}{t-1}\begin{pmatrix}t-1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$D=P^{-1}AP=\frac{1}{t-1}\begin{pmatrix}t-1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & t-1\end{pmatrix}$$

$$D=\frac{1}{t-1}\begin{pmatrix}t-1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2+2t-2\\ 0 & t(t-1)\end{pmatrix}$$

$$D=\frac{1}{t-1}\begin{pmatrix}t-1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2t\\ 0 & t(t-1)\end{pmatrix}$$

$$D=\frac{1}{t-1}\begin{pmatrix}t-1 & 2t(t-1)-2t(t-1)\\ 0 & t(t-1)\end{pmatrix}$$

$$D=\frac{1}{t-1}\begin{pmatrix}t-1 & 0\\ 0 & t(t-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}$$

La matrice D est diagonale donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$D^n=\begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & t^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & t^n\end{pmatrix}$$

</td>
<td>2</td>
</tr>
</table>

		Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $D^n = P^{-1}A^nP$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Initialisation pour $n = 0$: $D^0 = I_2$ $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$: $D^n = P^{-1}A^nP$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $D^{n+1} = D^n \times D$ $D^{n+1} = P^{-1}A^n \underbrace{P \times P^{-1}} AP$ $D^{n+1} = P^{-1}A^n \times I_2 \times AP$ $D^{n+1} = P^{-1}A^n \times AP$ $D^{n+1} = P^{-1}A^{n+1}P$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Par conséquent $D^n = P^{-1}A^nP$ pour tout $n \in \mathbb{N}$	2
		Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$ $P \times D^n = P \times P^{-1}A^nP$ $PD^n = A^nP$ $PD^n \times P^{-1} = A^nP \times P^{-1}$ Donc $A^n = PD^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^n \end{pmatrix} \frac{1}{t-1} \begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2t^n \\ 0 & t^n(t-1) \end{pmatrix} \frac{1}{t-1} \begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^n = \frac{1}{t-1} \begin{pmatrix} 1 & 2t^n \\ 0 & t^n(t-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^n = \frac{1}{t-1} \begin{pmatrix} t-1 & -2+2t^n \\ 0 & t^n(t-1) \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2+2t^n}{t-1} \\ 0 & t^n \end{pmatrix}$	2