Exercice 1.

1. (2)

On a : $n = 105\times q + 21$ et $n = 103\times(q+2) + (21-6)$

On a alors :

$$105\times q + 21 = 103\times(q+2) + (21-6)$$
$$\Leftrightarrow 105q + 21 = 103q + 206 + 15$$
$$\Leftrightarrow 105q + 21 = 103q + 221$$
$$\Leftrightarrow 2q = 200$$
$$\Leftrightarrow q = \frac{200}{2} = 100$$

L'entier naturel n est donc égal à $105\times 100 + 21 = 10\,521$.

2. (2)

On suppose que a divise b et a divise c

alors $b = k\times a$ et $c = k'\times a$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$

On a alors $2b - 5c = 2ka - 5k'a = (2k - 5k')a$ où $2k - 5k' \in \mathbb{Z}$

donc a divise $2b - 5c$.

(2)

On sait que $2m+4 \mid 5m-7$ et $2m+4 \mid 2m+4$

donc $2m+4 \mid 2\times(5m-7) - 5\times(2m+4)$

soit $2m+4 \mid 10m - 14 - 10m - 20$ et donc $2m+4 \mid -34$

Les diviseurs de -34 sont $\{-34; -17; -2; -1; 1; 2; 17; 34\}$

$$2m+4 = -34 \Leftrightarrow m = -19$$
$$2m+4 = -17 \Leftrightarrow m = -\frac{21}{2} \notin \mathbb{Z}$$
$$2m+4 = -2 \Leftrightarrow m = -3$$
$$2m+4 = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$$
$$2m+4 = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$$
$$2m+4 = 2 \Leftrightarrow m = -1$$
$$2m+4 = 17 \Leftrightarrow m = \frac{13}{2} \notin \mathbb{Z}$$
$$2m+4 = 34 \Leftrightarrow m = 15$$

Les relatifs m tel que $2m+4$ divise $5m-7$ sont -19; -3; -1 et 15.

3. (2)

$n = 7\times q + r$ où $0 \le r < 7$ et $q = 5\times r$

donc $n = 7\times 5r + r = 36r$ où $0 \le r < 7$

r	0	1	2	3	4	5	6
n	0	36	72	108	144	180	216

4. (2)

Le reste de la division euclidienne de 10^6 par 97 est 27 donc $10^6 = 97q + 27$ où $q \in \mathbb{Z}$.

$$10^{12} = (10^6)^2 = (97q+27)^2 = 97^2\times q^2 + 97\times 54q + 729$$

or $729 = 97\times 7 + 50$ donc $10^{12} = 97\times q' + 50$

et donc $123\times 10^{12} = 123\times(97\times q' + 50) = 97\times k + 6150 = 97k' + 39$

Le reste de la division euclidienne de 123×10^{12} par 97 est donc 39.

Exercice 2.	$(\mathcal{P}_1)$	$a = bq + r$ où $0 \leq r < b$ donc $3a = b \times 3q + 3r$ mais a-t-on $0 \leq 3r < b$? La proposition $(\mathcal{P}_1)$ est fausse et pour construire un contre-exemple, il suffit de trouver un cas où $3r \geq b$ Par exemple, prenons $a = 2\times5 + 1 = 11$ et $b = 2$ $3a = 33 = 2\times16 + 1$. Le reste est 1 et non pas 3 !	2
	$(\mathcal{P}_2)$	Supposons que p est impair alors $p = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$ $$p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$ donc p^2 est un nombre impair. La proposition $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.	2
	$(\mathcal{P}_3)$	Supposons que p^2 est impair et démontrons, **par l'absurde**, que p est impair. Nous supposons alors que p est pair alors $p = 2k$ où $k \in \mathbb{Z}$ $$p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$ donc p^2 est un nombre pair, ce qui est exclu puisque nous avons supposé que p^2 est impair. Par conséquent, p ne peut pas être un nombre pair et donc p est impair. Nous avons démontré que : Si p^2 est impair alors p est impair ce qui est la réciproque de la proposition $(\mathcal{P}_2)$. La proposition $(\mathcal{P}_3)$ est donc vraie.	2
Exercice 3.	**1.**	L'algorithme demande la valeur du nombre N, puis il calcule, et affiche, la somme des diviseurs du nombre N.	1
	2.	La somme des diviseurs de 5564 est 5020. Et, la somme des diviseurs de 5020 est 5564. Les nombres 5564 et 5020 sont donc amicaux.	1,5
	3.	Les nombres 646 et 434 ne sont pas amicaux car la somme des diviseurs de 434 est 334 et non pas 646.	1,5