gaelle.buffet@ac-montpellier.fr - http://gaellebuffet.free.fr/

EXERCICE 1. (8 points)

▶1. R.O.C : Soit a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.
Montrer que si $a \equiv b$ [mod n] et $c \equiv d$ [mod n] alors $a + c \equiv b + d$ [mod n]

▶2. a) Conjecturer le chiffre des unités de 6^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Démontrer votre conjecture par récurrence.

▶3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} 2^{2n} \equiv 1 \ [10] \text{ si } n = 0 \\ 2^{2n} \equiv 4 \ [10] \text{ si } n \text{ est impair} \\ 2^{2n} \equiv 6 \ [10] \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

▶4. Déterminer alors le chiffre des unités de $6^n + 2^{2n} + 21^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2. (4 points)

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année. Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant : « Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er août ! ».

▶1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.

▶2. a) Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A). Exprimer z en fonction de j et de m.

b) Démontrer que z et m sont congrus modulo 12.

c) Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 317 en appliquant le programme de calcul (A).

EXERCICE 3. (8 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie ou un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, $2^{3n} \equiv 1 \ [7]$.

Proposition 2 : Si $3x \equiv 12 \ [15]$ alors $x \equiv 4 \ [15]$.

Proposition 3 : La réciproque de la proposition 2.

Proposition 4 : $5^{750} - 1$ est un multiple de 7.

Proposition 5 : Le reste de la division euclidienne de 2016^{2016} par 11 est 5.