Exercice 1.

1. (1 point)

Soit a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.
Supposons que $a \equiv b$ [mod n] et $c \equiv d$ [mod n] et démontrons que $a + c \equiv b + d$ [mod n].

$a \equiv b$ [mod n] donc $n | b - a$ soit $b - a = k \times n$ où $k \in \mathbb{Z}$
$c \equiv d$ [mod n] donc $n | d - c$ soit $d - c = k' \times n$ où $k' \in \mathbb{Z}$

Calculons
$b + d - (a + c) = a + kn + c + k'n - a - c = kn + k'n = (k + k')n$
Puisque $k + k' \in \mathbb{Z}$, on a alors $n | b + d - (a + c)$
Par conséquent $a + c \equiv b + d$ [mod n]

2. (1 point)

n	0	1	2	3	4	5	6
6^n	1	6	36	216	1296	7776	46656

Je peux conjecturer que le chiffre des unités de 6^0 est 1, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le chiffre des unités de 6^n est 6.

(1 point)

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie « $6^n \equiv 6\ [10]$ », pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation pour $n = 1$: $6^1 \equiv 6\ [10]$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $6^n \equiv 6\ [10]$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé

$$6^n \equiv 6\ [10]$$
$$6^n \times 6 \equiv 6 \times 6\ [10]$$
$$6^{n+1} \equiv 36\ [10] \equiv 6\ [10]$$
donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

Par conséquent $6^n \equiv 6\ [10]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le chiffre des unités de 6^n est 6.

	3.	Pour $n = 0 : 2^{2n} = 2^{2\times 0} = 2^0 = 1 \equiv 1\ [10]$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $$2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$$ **si n est pair :** alors $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$ $2^{2n} = 4^{2p} = (4^2)^p = 16^p$ or $16 \equiv 6\ [10]$ donc $\forall p \in \mathbb{N}, 16^p \equiv 6^p\ [10] \equiv 6\ [10]$ d'après la question 2. Nous avons démontré que $\forall p \in \mathbb{N},\ 4^{2p} \equiv 6\ [10]$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, n$ pair $2^{2n} \equiv 6\ [10]$ **si n est impair :** alors $n = 2p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$ $2^{2n} = 4^{2p+1} = (4^2)^p \times 4 = 16^p \times 4$ or $16 \equiv 6\ [10]$ donc $\forall p \in \mathbb{N}, 16^p \equiv 6^p\ [10] \equiv 6\ [10]$ d'après la question 2. enfin $16^p \times 4 \equiv 6 \times 4\ [10] \equiv 24\ [10] \equiv 4\ [10]$ Nous avons démontré que $\forall p \in \mathbb{N},\ 4^{2p+1} \equiv 4\ [10]$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, n$ impair $2^{2n} \equiv 4\ [10]$	3
	4.	$$21 \equiv 1\ [10]$$ $$\forall n \in \mathbb{N}, 21^n \equiv 1^n\ [10] \equiv 1\ [10]$$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le chiffre des unités de 21^n est 1. Pour $n = 0 : 6^0 + 2^0 + 21^0 = 3 \equiv 3\ [10]$ Pour $n = 0$, le chiffre des unités est 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, **si n est pair :** $6^n + 2^{2n} + 21^n \equiv 6 + 6 + 1\ [10] \equiv 13\ [10] \equiv 3\ [10]$ **si n est impair :** $6^n + 2^{2n} + 21^n \equiv 6 + 4 + 1\ [10] \equiv 11\ [10] \equiv 1\ [10]$ Le chiffre des unités de $6^n + 2^{2n} + 21^n$ est 3, si n est pair et 1 sinon.	2
Exercice 2.	**1.**	Pour une personne née le 1er août, le numéro du jour est 1 et le numéro du mois de naissance est 8. Le programme donne alors : $1\times 12 + 8\times 37 = 308$.	0,5
	2.	$z = 12\times j + 37\times m$	0,5
		$$12\times j \equiv 0\ [12]$$ $$12j + 37m \equiv 37m\ [12]$$ or $37 \equiv 1\ [12]$ donc $z \equiv 37m\ [12] \equiv m\ [12]$ z et m sont donc congrus modulo 12.	1,5

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Un spectateur ayant obtenu le nombre $z = 317$ en appliquant le programme : $317 \equiv 317 - 26\times12\ [12] \equiv 5\ [12] \equiv m\ [12]$
Le mois de naissance est donc 5 soit mai.
On en déduit que
$$317 = 12\times j + 37\times5 \Leftrightarrow j = \frac{317 - 5\times37}{12} = 11.$$
Le spectateur est donc né le 11 mai.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Exercice 3.</td><td>P1</td><td>Pour tout entier naturel n, $2^{3n} = (2^3)^n = 8^n$
or $8 \equiv 1\ [7]$ donc $8^n \equiv 1^n\ [7] \equiv 1\ [7]$
donc $2^{3n} \equiv 1\ \ [7]$
La proposition 1 est donc vraie.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>Si $3x \equiv 12\ \ [15]$ alors 15 divise $3x - 12$, on peut donc écrire $3x - 12 = 15k$ où $k \in \mathbb{Z}$
Par conséquent $3(x-4) = 3\times5k \Leftrightarrow x - 4 = 5k$
donc 5 divise $x - 4$ soit $x \equiv 4\ \ [5]$ mais 15 ne divise plus obligatoirement $x - 4$.
Contre-exemple : prenons $x = 9$, nous avons donc $3\times9 = 27 \equiv 12\ \ [15]$ mais $9 \not\equiv 4\ \ [15]$
La proposition 2 est donc fausse.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>P3</td><td>La réciproque de la proposition 2 est « si $x \equiv 4\ \ [15]$ alors $3x \equiv 12\ \ [15]$ ». Supposons que $x \equiv 4\ \ [15]$ alors 15 divise $x - 4$ et donc 15 divise $3\times(x-4) = 3x - 12$ d'où $3x \equiv 12\ \ [15]$.
La proposition 3 est donc vraie.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>P4</td><td>$$5^2 \equiv 4\ [7]$$
$$5^3 \equiv 20\ [7] \equiv 6\ [7]$$
$$5^4 \equiv 2\ [7]$$
$$5^5 \equiv 10\ [7] \equiv 3\ [7]$$
$$5^6 \equiv 15\ [7] \equiv 1\ [7]$$
or $750 = 125\times6$
$$(5^6)^{125} = 5^{750} \equiv 1^{125}\ [7] \equiv 1\ [7]$$
donc $5^{750} - 1$ est un multiple de 7.
La proposition 4 est donc vraie.</td><td>2</td></tr>
</table>

	P5	$2016 \equiv 2016 - 183\times 11\ [11] \equiv 3\ [11]$ $2016^2 \equiv 3^2\ [11] \equiv 9\ [11]$ $2016^3 \equiv 9\times 3\ [11] \equiv 5\ [11]$ $2016^4 \equiv 5\times 3\ [11] \equiv 4\ [11]$ $2016^5 \equiv 4\times 3\ [11] \equiv 1\ [11]$ or $2016 = 403\times 5 + 1$ $(2016^5)^{403} = 2016^{2015} \equiv 1^{403}\ [11] \equiv 1\ [11]$ et donc $2016^{2016} \equiv 1\times 2016\ [11] \equiv 3\ [11]$ Le reste de la division euclidienne de 2016^{2016} par 11 est donc 3. La proposition 5 est donc fausse.	2