EXERCICE 1. (4 points)

▶1. Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n-5$ divise $n+3$.

▶2. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7.

EXERCICE 2. (8 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie ou un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : a et b sont deux entiers naturels. On note q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b : « le reste dans la division euclidienne de $2a$ par b est $2r$ ».

Proposition 2 : « pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n}-1$ ».

Proposition 3 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2+x \equiv 0$ [modulo 6]) alors $x \equiv 0$ [modulo 3] ».

Proposition 4 : x et y sont deux entiers relatifs : « si 7 divise x^2+y^2 alors 7 divise x et 7 divise y »

Proposition 5 : «Le chiffre des unités de 13^{13} est 3 ».

EXERCICE 3. (8 points)

▶ 1. R.O.C

Soit a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

Montrer que si $a \equiv b$ [mod n] et $c \equiv d$ [mod n] alors $ac \equiv bd$ [mod n]

▶ 2.a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.

b) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

c) Déterminer alors le reste dans la division euclidienne de $2^{2009}+2009$ par 11. *On pourra utiliser les congruences.*

▶ 3. On note p un nombre entier naturel.

On considère, pour tout entier naturel non nul n, $A_n = 2^n + p$.

Soit d un diviseur commun de A_n et A_{n+1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d divise 2^n.

b) En déduire que d divise p.

c) Déterminer le ou les diviseurs communs de $2^{2015}+17$ et $2^{2016}+17$.