Exercice 1.

1. (1,5)

$2n-5$ divise $n+3$ et $2n-5$ divise $2n-5$ donc $2n-5$ divise

$$(2n-5)-2(n+3)=2n-5-2n-6=-11$$

Les diviseurs de -11 sont $\{1;-1;11;-11\}$.

$2n-5=1$	$2n-5=-1$	$2n-5=11$	$2n-5=-11$
$2n=6$	$2n=4$	$2n=16$	$2n=-6$
$n=3$	$n=2$	$n=8$	$n=-3$

Les solutions sont $\{-3;2;3;8\}$

2. (2,5)

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ « $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7 » est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Initialisation pour $n=0$:

$$3^{2\times 0}-2^0=1-1=0 \text{ est divisible par } 7$$

$$\text{donc } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$$

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$: « $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7 » est vraie pour $n\in\mathbb{N}$ fixé

$$3^{2(n+1)}-2^{n+1}=3^{2n+2}-2^{n+1}=3^{2n}\times 3^2-2^{n+1}=9\times 3^{2n}-2^{n+1}$$

or, puisque $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7

$$3^{2n}-2^n\equiv 0\ [\text{mod } 7]$$
$$\Leftrightarrow\ 3^{2n}\equiv 2^n\ [\text{mod } 7]$$
$$\Leftrightarrow\ 9\times 3^{2n}\equiv 9\times 2^n\ [\text{mod } 7]$$
$$\Leftrightarrow\ 9\times 3^{2n}-2^{n+1}\equiv 9\times 2^n-2^{n+1}\ [\text{mod } 7]$$
$$\Leftrightarrow\ 3^{2(n+1)}-2^{n+1}\equiv 2^n\times(9-2)\ [\text{mod } 7]$$
$$\Leftrightarrow\ 3^{2(n+1)}-2^{n+1}\equiv 2^n\times 7\ [\text{mod } 7]\equiv 0\ [\text{mod } 7]$$

donc $3^{2(n+1)}-2^{n+1}$ est divisible par 7

$$\text{donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}$$

Par conséquent $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 2.

P1 (1,5)

La proposition P1 est fausse.

Prenons comme contre-exemple : $a=29$ et $b=6$

On a $a=29=6\times 4+5$ donc $q=4$ et $r=5$

Mais $2a=58=6\times 9+4$

Car $2r=10\geq b=6$ donc 10 ne peut pas être un reste dans la division euclidienne par 6.

P2 (1,5)

La proposition P2 est vraie.

$$2^2=4\equiv 1\ [\text{mod } 3]$$

donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(2^2)^n\equiv 1^n\ [\text{mod } 3]$

$$2^{2n}\equiv 1\ [\text{mod } 3]$$

$$\text{et donc } 2^{2n}-1\equiv 0\ [\text{mod } 3]$$

Par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}$, 3 divise $2^{2n}-1$.

P3

La proposition P3 est fausse.

Soit x un entier relatif tel que

$$x^2 + x \equiv 0 \text{ [mod 6]}$$

En utilisant une table de congruence :

$x \equiv \cdots$ [mod 6]	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv \cdots$ [mod 6]	0	1	4	3	4	1
$x^2 + x \equiv \cdots$ [mod 6]	0	2	0	0	2	0

On en déduit que, puisque $x^2 + x \equiv 0$ [mod 6]

Alors

$x \equiv 0$ [mod 6] ou $x \equiv 2$ [mod 6] ou $x \equiv 3$ [mod 6] ou $x \equiv 5$ [mod 6]

Si $x \equiv 0$ [mod 6] alors $x \equiv 0$ [mod 3] (x est divisible par 6 donc aussi par 3). Cela de nous donne pas de contre-exemple.

Si $x \equiv 3$ [mod 6] alors $x \equiv 0$ [mod 3] (dans la division euclidienne de x par 6, le reste est 3 donc x est divisible par 3). Cela de nous donne pas de contre-exemple.

Par contre : Si $x \equiv 2$ [mod 6] ou $x \equiv 5$ [mod 6] peuvent nous donner un contre-exemple.

Cherchons une valeur de x non divisible par 3, telle que $x \equiv 2$ [mod 6]

$$x - 2 = 6 \times k \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Tout simplement, $k = 0$ donc $x = 2$ est un contre-exemple :

$$x = 2 \equiv 2 \text{ [mod 3]} \not\equiv 0 \text{ [mod 3]}$$

Mais $x \equiv 2$ [mod 6]

donc $x^2 \equiv 4$ [mod 6]

et $x^2 + x \equiv 6$ [mod 6] $\equiv 0$ [mod 6]

1,5

P4

La proposition P4 est vraie.

Par disjonction des cas , en utilisant une table de congruence :

$x \equiv \cdots$ [mod 7]	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \equiv \cdots$ [mod 7]	0	1	4	2	2	4	1

[mod 7]	x	0	1	2	3	4	5	6
y	y^2 x^2	0	1	4	2	2	4	1
0	0	0	1	4	2	2	4	1
1	1	1	2	5	3	3	5	2
2	4	4	5	1	6	6	1	5
3	2	2	3	6	4	4	6	3
4	2	2	3	6	4	4	6	3
5	4	4	5	1	6	6	1	5
6	1	1	2	5	3	3	5	2

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{x^2+y^2}$$

Le seule cas possible, pour que $x^2+y^2 \equiv 0$ [mod 7] est que $x \equiv 0$ [mod 7] et $y \equiv 0$ [mod 7].

1,5

P5

La proposition P5 est vraie.

Pour trouver le chiffre des unités, il faut raisonner modulo 10.

$$13 \equiv 3 \text{ [mod 10]}$$

$$13^2 \equiv 9 \text{ [mod 10]} \equiv -1 \text{ [mod 10]}$$

$$(13^2)^6 \equiv (-1)^6 \text{ [mod 10]}$$

$$13^{12} \equiv 1 \text{ [mod 10]}$$

$$13^{13} \equiv 13 \text{ [mod 10]} \equiv 3 \text{ [mod 10]}$$

Le chiffre des unités de 13^{13} est donc bien le chiffre 3.

2

Exercice 3.

1.

On suppose que $a \equiv b$ [mod n] et que $c \equiv d$ [mod n]

Par définition :

n divise $b-a$ donc $b-a = k \times n$ où $k \in \mathbb{Z}$ donc $b = a+kn$

n divise $d-c$ donc $d-c = k' \times n$ où $k' \in \mathbb{Z}$ donc $d = c+k'n$

Calculons

$$bd - ac = (a+kn)(c+k'n) - ac = ac + ak'n + knc + kk'n^2 - ac$$

$$= ak'n + knc + kk'n^2 = n \times (ak' + kc + kk'n)$$

où $ak' + kc + kk'n \in \mathbb{Z}$

donc n divise $bd - ac$

et donc $ac \equiv bd$ [mod n]

2

	2.	$2009 = 11 \times 182 + 7$ où $0 \leq 7 < 11$ Donc le reste de la division euclidienne de 2009 par 11 est 7.	**1**
		$2^{10} = 11 \times 93 + 1$ où $0 \leq 1 < 11$ Donc le reste de la division euclidienne de 2^{10} par 11 est 1.	
		$2^{10} \equiv 1$ [mod 11] $(2^{10})^{200} \equiv 1^{200}$ [mod 11] $2^{2000} \equiv 1$ [mod 11] $2^{2000} \times 2^9 \equiv 2^9$ [mod 11] $2^{2009} \equiv 6$ [mod 11] Or $2009 \equiv 7$ [mod 11] d'après la question 2a) Donc $2^{2009} + 2009 \equiv 6 + 7$ [mod 11] $\equiv 13$ [mod 11] $\equiv 2$ [mod 11]	**2**
	3.	Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d divise $A_n = 2^n + p$ et d divise $A_{n+1} = 2^{n+1} + p$ donc d divise $A_{n+1} - A_n = 2^{n+1} + p - (2^n + p) = 2^{n+1} + p - 2^n - p = 2^{n+1} - 2^n$ $= 2^n(2-1) = 2^n$	**1**
		Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d divise $A_n = 2^n + p$ et d divise 2^n donc d divise $A_n - 2^n = 2^n + p - 2^n = p$	**1**
		En prenant $n = 2015$ et $p = 17$ Notons d un diviseur commun de A_{2015} et A_{2016}. D'après les questions précédentes, d divise alors 2^{2015} et 17. or, les diviseurs positifs de 17 sont 1 et 17. donc $d = 1$ ou $d = 17$. 1 divise bien 2^{2015}, mais 17 divise-t-il 2^{2015} ? $2^4 = 16 \equiv -1$ [mod 17] $(2^4)^{503} \equiv (-1)^{503}$ [mod 17] $2^{2012} \equiv -1$ [mod 17] $2^{2012} \times 2^3 \equiv -1 \times 2^3$ [mod 17] $2^{2015} \equiv -8$ [mod 17] $\equiv 9$ [mod 17] $\not\equiv 0$ [mod 17] Donc 17 ne divise pas 2^{2015} et donc 17 n'est pas un diviseur commun.	**1**