gaelle.buffet@ac-montpellier.fr - http://gaellebuffet.free.fr/

EXERCICE 1. (10 points)

Les questions sont indépendantes. Pour chaque question, indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Toute trace de recherche sera valorisée.

▶1. On considère l'équation (E) $3x - 2y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.
Affirmation : les solutions de l'équation (E) sont les couples $(9 + 2k; 13 + 3k)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

▶2. **Affirmation :** S'il existe un couple de nombres entiers relatifs $(u; v)$ tel que $ua + vb = 3$, alors $PGCD(a; b) = 3$.

▶3. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par :

$$a = 2n^2 + 7n + 21 \text{ et } b = 2n + 2.$$

Affirmation : pour tout entier naturel n, le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à $n + 2$ et $n + 17$.

▶4. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par :

$$a = 3n + 1 \text{ et } b = 2n + 3.$$

Affirmation : le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7.

▶5. **Affirmation :** Si $y \equiv 7x + 3\ [26]$ alors $x \equiv 15y + 7\ [26]$.

EXERCICE 2. (10 points)

PARTIE A :

▶1. R.O.C : En utilisant le théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.
▶2. Soient p et q deux entiers naturels premiers entre eux et a est un entier relatif
Démontrer que, si $a \equiv 0\ [p]$ et $a \equiv 0\ [q]$ alors $a \equiv 0\ [pq]$.

PARTIE B : On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9\ [17] \\ n \equiv 3\ [5] \end{cases}$$

▶1. a) Justifier l'existence d'un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.
b) On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$. Démontrer que n_0 appartient à $\mathcal{S}$.
c) Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathcal{S}$.

▶2. a) Soit n un entier relatif appartenant à $\mathcal{S}$. Démontrer que $n - n_0 \equiv 0\ [85]$.
b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.

▶3. Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3. Combien a-t-elle de jetons ?