Exercice 1.	**1.**	*On considère l'équation (E) $3x-2y=1$, où x et y sont des entiers relatifs.* On remarque que le couple $(9;13)$ est solution de l'équation (E) car $$3\times 9-2\times 13=27-26=1$$ Notons $x_0=9$ et $y_0=13$: Soit $(x;y)$ des entiers relatifs solution de (E) alors $$3x-2y=1=3x_0-2y_0$$ $$\Leftrightarrow 3x-3x_0=2y-2y_0$$ $$\Leftrightarrow 3(x-x_0)=2(y-y_0)$$ 3 divise alors $2(y-y_0)$ mais d'après le théorème de Gauss, puisque $PGCD(3;2)=1$, 3 divise alors $(y-y_0)$ et donc $y-y_0=3k$ d'où $\boldsymbol{y=13+3k}$ **où** $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}$ $$3x-2y=1$$ $$\Leftrightarrow 3x-2(13+3k)=1$$ $$\Leftrightarrow 3x=26+6k+1$$ $$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=9+2k}$$ L'affirmation 1. est donc vraie.	**3**
	2.	**L'affirmation 2. est fausse** : par exemple $$1\times 1+1\times 2=3$$ mais $PGCD(1;2)=1\neq 3$	**1**
	3.	*Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par $a=2n^2+7n+21$ et $b=2n+2$.* Calculons, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $$bq+r=(2n+2)(n+2)+(n+17)$$ $$=2n^2+4n+2n+4+n+17$$ $$=2n^2+7n+21$$ $$bq+r=a$$ Mais dans la division euclidienne, le reste r doit vérifier : $$0\leq r<b\Leftrightarrow 0\leq n+17<2n+2$$ $$\Leftrightarrow 15<n$$ Choisissons alors : $n=2$, $a=2n^2+7n+21=43$ et $b=2n+2=6$ $$43=6\times 7+1$$ Le quotient est donc 7 et le reste 1 mais $n+2=4\neq 7$ et $n+17=19\neq 1$ **L'affirmation 3. est donc fausse.**	**2**

	4.	Soit n un entier naturel, $PGCD(a;b) = PGCD(3n+1\,;2n+3)$ $= PGCD(3n+1\,;3n+1-2n-3)$ $= PGCD(3n+1\,;n-2)$ $= PGCD(3n+1-3(n-2)\,;n-2)$ $= PGCD(3n+1-3n+6\,;n-2) = PGCD(7\,;n-2)$ Supposons le PGCD de a et b soit égal à 7 alors $PGCD(7\,;n-2) = 7$ donc 7 divise $n-2$ et donc n est congru à 2 modulo 7. Réciproquement supposons que n est congru à 2 modulo 7 alors 7 divise $n-2$ et donc $PGCD(7\,;n-2) = 7 = PGCD(a;b)$. **L'affirmation 4. est donc vraie.**	**2**
	5.	Supposons que $y \equiv 7x + 3\ [26]$ alors $15y \equiv 105x + 45\ [26]$ or $105 \equiv 1\ [26]$ et $45 \equiv (-7)\ [26]$ donc $15y \equiv 105x + 45\ [26] \equiv x - 7\ [26]$ d'où $x \equiv 15y + 7\ [26]$ **L'affirmation 5. est donc vraie.**	**2**
Exercice 2.	**A1**	Voir la leçon.	**1,5**
	A2	Soient p et q deux entiers naturels premiers entre eux et a est un entier relatif tel que $a \equiv 0\ [p]$ et $a \equiv 0\ [q]$ p divise a donc $a = k \times p$ où $k \in \mathbb{Z}$ q divise $a = k \times p$ or p et q sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, q divise k. On peut alors écrire que $k = k' \times q$ où $k' \in \mathbb{Z}$ donc $a = k \times p = k' \times q \times p = k' \times pq$. Par conséquent $a \equiv 0\ [pq]$	**1,5**
	B1	$PGCD(17\,;5) = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, il existe un couple d'entiers relatifs $(u;v)$ tel que $17u + 5v = 1$.	**1**
		$n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v = 3 \times (1-5v) + 9 \times 5v$ $n_0 = 3 - 15v + 45v = 3 + 30v$ d'où $n_0 \equiv 3\ [5]$ $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v = 3 \times 17u + 9 \times (1-17u)$ $n_0 = 3 \times 17u + 9 - 9 \times 17u = 9 - 6 \times 17u$ d'où $n_0 \equiv 9\ [17]$ donc n_0 appartient à $\mathcal{S}$	**1**
		$17 = 3 \times 5 + 2$ donc $2 = 17 - 3 \times 5$ $5 = 2 \times 2 + 1$ donc $1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2 \times (17 - 3 \times 5) = 5 - 2 \times 17 + 6 \times 5$ $1 = 7 \times 5 - 2 \times 17 = 17 \times \underbrace{(-2)}_{u} + 5 \times \underbrace{7}_{v}$	**1**

<table>
<tr><td></td><td></td><td>$$\text{donc } n_0 = 3\times 17u + 9\times 5v = 3\times 17\times \underbrace{(-2)}_{u} + 9\times 5\times \underbrace{7}_{v}$$ $$= -102 + 315 = 213$$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">B2</td><td>n_0 appartient à $\mathcal{S}$ et n appartient à $\mathcal{S}$
$\begin{cases} n \equiv 9\ [17] \\ n \equiv 3\ [5] \end{cases}$ et $\begin{cases} n_0 \equiv 9\ [17] \\ n_0 \equiv 3\ [5] \end{cases}$ donc $\begin{cases} n - n_0 \equiv 0\ [17] \\ n - n_0 \equiv 0\ [5] \end{cases}$
puisque 17 et 5 sont premiers entre eux,
alors $n - n_0 \equiv 0\ [17\times 5 = 85]$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>43 appartient à $\mathcal{S}$ car $\begin{cases} 43 \equiv 9\ [17] \\ 43 \equiv 3\ [5] \end{cases}$
Si n appartient à $\mathcal{S}$ alors $n - 43 \equiv 0\ [85]$ d'où $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.
Réciproquement, si $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif, alors $$\begin{cases} 43 + 85k \equiv 9\ [17] \\ 43 + 85k \equiv 3\ [5] \end{cases}$$ donc n appartient à $\mathcal{S}$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td></td><td>B3</td><td>Soit n le nombre de jetons, n appartient à $\mathcal{S}$.
donc $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif
<table><tr><td>k</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>$43 + 85k$</td><td>43</td><td>128</td><td>213</td><td>298</td><td>383</td></tr></table>
Zoé possède donc 383 jetons.</td><td>1</td></tr>
</table>