gaelle.buffet@ac-montpellier.fr - http://gaellebuffet.free.fr/

EXERCICE 1. (10 points)

▶1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances.*

a) Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Démontrer que : si $a \equiv b$ [7] et $c \equiv d$ [7], alors $ac \equiv bd$ [7].

b) En déduire que : pour a et b des entiers relatifs non nuls, si $a \equiv b$ [7], alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n$ [7].

▶2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1$ [7].

▶3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a) Montrer que : $a^6 \equiv 1$ [7].

b) On appelle *ordre de* a mod 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1$ [7]. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1$ [7].

En déduire que k divise 6.

Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c) Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

▶4. À tout entier naturel n, on associe le nombre :

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

Montrer que $A_{2006} \equiv 6$ [7].

EXERCICE 2. (10 points)

▶1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Justifier l'existence d'un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que $6u + 7v = 1$. Donner un tel couple et en déduire une solution particulière $(x_0; y_0)$ de l'équation (E).

b) Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

▶2. Soit $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère le plan (P) d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.

On considère les points du plan (P) qui appartiennent aussi au plan $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des **entiers naturels**; déterminer les coordonnées de ce point.

▶3. On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a) Montrer que l'entier y est impair.

b) On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c) On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation : $x + p + 4q = 7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d) En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.