Exercice 1.

1.

Supposons que $a \equiv b\ [7]$ et $c \equiv d\ [7]$,
alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $b - a = 7k$ et $d - c = 7k'$
donc $bd - ac = (a + 7k)(c + 7k') - ac = ac + 7ak' + 7kc + 49kk' - ac$

$$bd - ac = 7(ak' + kc + 7kk') \quad \text{où} \quad ak' + kc + 7kk' \in \mathbb{Z}$$

alors $ac \equiv bd\ [7]$

2

Supposons que $a \equiv b\ [7]$,
démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ « $a^n \equiv b^n\ [7]$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation pour $n = 0$:

$$a^0 = 1 \text{ et } b^0 = 1 \text{ donc } a^0 \equiv b^0\ [7] \text{ donc } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$$

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$: « $a^n \equiv b^n\ [7]$ » est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé
$a \equiv b\ [7]$ et $a^n \equiv b^n\ [7]$ donc d'après la question a) $a \times a^n \equiv b \times b^n\ [7]$ d'où $a^{n+1} \equiv b^{n+1}\ [7]$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie
Par conséquent $a^n \equiv b^n\ [7]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2

2.

$2^3 = 8 \equiv 1\ [7]$ et $3^6 = 729 = 104 \times 7 + 1 \equiv 1\ [7]$

1

3.

Soit a un entier naturel non divisible par 7,

$a \equiv \cdots\ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$a^2 \equiv \cdots\ [7]$	0	1	4	2	2	4	1
$a^6 \equiv \cdots\ [7]$	0	1	1	1	1	1	1

Par conséquent si a n'est pas divisible par 7 alors $a^6 \equiv 1\ [7]$.

1

On note r le reste de la division euclidienne de 6 par k donc
$6 = q \times k + r$ où $0 \leq r < k$ et donc $a^6 = a^{q \times k + r} = a^{qk} \times a^r \equiv 1\ [7]$
or $a^k \equiv 1\ [7]$ donc $(a^k)^q = a^{qk} \equiv (1)^q = 1\ [7]$
par conséquent $a^{qk} \times a^r \equiv a^r\ [7]$ donc $a^r \equiv 1\ [7]$
mais k est le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1\ [7]$ et $0 \leq r < k$. On en déduit que $r = 0$ et donc k divise 6.
Les valeurs possibles de k sont 1, 2, 3 et 6.

2

a	$a^2 \equiv \cdots\ [7]$	$a^3 \equiv \cdots\ [7]$	$a^6 \equiv 1\ [7]$
2	$2^2 \equiv 4\ [7]$	$\mathbf{2^3 = 8 \equiv 1\ [7]}$	
3	$3^2 = 9 \equiv 2\ [7]$	$3^3 = 27 \equiv 6\ [7]$	$\mathbf{3^6 \equiv 1\ [7]}$
4	$4^2 = 16 \equiv 2\ [7]$	$\mathbf{4^3 = 64 \equiv 1\ [7]}$	
5	$5^2 = 25 \equiv 4[7]$	$5^3 = 125 \equiv 6\ [7]$	$\mathbf{5^6 \equiv 1\ [7]}$
6	$\mathbf{6^2 = 36 \equiv 1\ [7]}$		

L'ordre de 2 est 3, celui de 3 est 6. L'ordre de 4 est 3, celui de 5 est 6 et l'ordre de 6 est 2.

1

	4.	$A_{2006}=2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}+5^{2006}+6^{2006}$ $2006=3\times 668+2$ donc $2^{2006}=(2^3)^{668}\times 2^2\equiv 4\ [7]$ et $4^{2006}=(4^3)^{668}\times 4^2\equiv 2\ [7]$ $2006=6\times 334+2$ donc $3^{2006}=(3^6)^{334}\times 3^2\equiv 2\ [7]$ et $5^{2006}=(5^6)^{334}\times 5^2\equiv 4\ [7]$ $2006=2\times 1003$ donc $6^{2006}=(6^2)^{1003}\equiv 1\ [7]$ Par conséquent $A_{2006}\equiv 13\ [7]\equiv 6\ [7]$	**1**
Exercice 2.	**1.**	$PGCD(6;7)=1$ donc d'après le théorème de Bézout, il existe un couple d'entiers relatifs $(u;v)$ tel que $6u+7v=1$. $6\times\underbrace{(-1)}_{u}+7\times\underbrace{1}_{v}=1$ Une solution particulière $(x_0;y_0)$ de l'équation (E) est alors $(-57;57)$.	**1**
		Soit $(x;y)$ un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E) donc $6x+7y=57=6x_0+7y_0 \Leftrightarrow 6(x-x_0)=7(y_0-y)$ 6 divise $7(y_0-y)$ mais $PGCD(6;7)=1$ donc d'après le théorème de Gauss, 6 divise (y_0-y). On a alors $y_0-y=6k$ où $k\in\mathbb{Z}$ donc $y=57-6k$ $6x+7y=57 \Leftrightarrow 6x+7(57-6k)=57 \Leftrightarrow 6x+399-42k=57$ $\Leftrightarrow 6x=-342+42k \Leftrightarrow x=-57+7k$ Les couples solutions sont $(x;y)=(-57+7k;57-6k)$ où $k\in\mathbb{Z}$	**2**
	2.	$M(x;y;z)\in(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ donc $z=0$ $M(x;y;z)\in(P)$ donc $6x+7y+8z=57$ et donc $6x+7y=57$ D'après la question précédentes $x=-57+7k$ et $y=57-6k$ Mais $x=-57+7k\geq 0 \Leftrightarrow 7k\geq 57 \Leftrightarrow k\geq\frac{57}{7}$ et $y=57-6k\geq 0 \Leftrightarrow -6k\geq -57 \Leftrightarrow k\leq\frac{57}{6}$ Finalement $k\in\mathbb{Z}$ et $8{,}14\leq k\leq 9{,}5$ donc $k=9$ Et l'unique point d'intersection est donc $(6;3;0)$	**2**
	3.	$M(x;y;z)\in(P)$ donc $6x+7y+8z=57$ Par l'absurde, si y est pair alors $6x+7y+8z$ est pair donc divisible par 2. Mais c'est impossible car 57 est un nombre impair, non divisible par 2.	**1**
		$y=2p+1$ donc $6x+7y+8z=57 \Leftrightarrow 6x+7(2p+1)+8z=57$ $\Leftrightarrow 6x+14p+7+8z=57 \Leftrightarrow 6x+14p+8z=50$ $\Leftrightarrow 3x+7p+4z=25$ Or $25\equiv 1\ [3]$ et $3x+7p+4z\equiv 0+p+z\ [3]$ donc $p+z\equiv 1\ [3]$	**2**

		On pose $p+z=3q+1$ où q est un entier naturel donc $z=3q+1-p$ $3x+7p+4z=25 \Leftrightarrow 3x+7p+4(3q+1-p)=25$ $\Leftrightarrow 3x+7p+12q+4-4p=25 \Leftrightarrow 3x+3p+12q=21$ $\Leftrightarrow x+p+4q=7$ x, p et q sont des nombres positifs donc $4q\leq 7$ et donc $q\leq 1$, q prend les valeurs 0 ou 1.	**1**
		Si $q=0$, alors $z=1-p\geq 0$ donc $p=0$ et donc $z=1$ et $y=1$ et donc $x=7-p=7$ donc $(\mathbf{7};\mathbf{1};\mathbf{1})$ ou $p=1$ et donc $z=0$ et $y=3$ et donc $x=7-p=6$ donc $(\mathbf{6};\mathbf{3};\mathbf{0})$ Si $q=1$, alors $z=3+1-p=4-p\geq 0$ donc $p=0$ et donc $z=4-p=4$ et $y=2p+1=1$ et donc $x=7-p-4q=3-p=3$ donc $(3;1;4)$ ou $p=1$ et donc $z=3$ et $y=3$ et donc $x=3-p=2$ donc $(\mathbf{2};\mathbf{3};\mathbf{3})$ ou $p=2$ et donc $z=2$ et $y=5$ et donc $x=3-p=1$ donc $(\mathbf{1};\mathbf{5};\mathbf{2})$ ou $p=3$ et donc $z=1$ et $y=7$ et donc $x=3-p=0$ donc $(\mathbf{0};\mathbf{7};\mathbf{1})$ ou $p=4$ et donc $z=0$ et $y=9$ et donc $x=3-p=-1$ exclu	**1**