EXERCICE 1. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

▶ 1. Calculer les six premiers termes de la suite.

▶ 2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.

▶ 3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.

EXERCICE 2. (5 points)

▶ 1. a) Compléter $3^3 \equiv \cdots \ [13]$.

b) Déduisez-en, pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^{3n} par 13.

c) Démontrez que pour tout entier naturel n, $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est un multiple de 13.

▶ 2. On considère l'entier $N = 11^{2017}$.

Déterminer, en justifiant, le reste de la division euclidienne de N par 7.

EXERCICE 3. (10 points)

▶ 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que $A^2 = A + 2I_2$.

b) En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha A + \beta I_2$ où α et β sont des réels à déterminer.

c) Déterminer toutes les matrices de la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ telles que $B^2 = A^2$.

▶ 2. Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

a) Calculer C^2, C^3 et C^4.

b) Démontrer, par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

où $\begin{cases} u_{n+1} = 1 + n + u_n \ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_1 = 1 \end{cases}$.

▶ 3. Déterminer toutes les matrices carrées, de dimensions 2, D telles que $D^2 = I_2$.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.