Exercice 1.	**1.**	$u_1 = 2^1 + 3^1 + 6^1 - 1 = 10$ $u_2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 - 1 = 4 + 9 + 36 - 1 = 48$ $u_3 = 2^3 + 3^3 + 6^3 - 1 = 8 + 27 + 216 - 1 = 250$ $u_4 = 2^4 + 3^4 + 6^4 - 1 = 16 + 81 + 1\,296 - 1 = 1\,392$ $u_5 = 2^5 + 3^5 + 6^5 - 1 = 32 + 243 + 7\,776 - 1 = 8\,050$ $u_6 = 2^6 + 3^6 + 6^6 - 1 = 64 + 729 + 46\,656 - 1 = 47\,448$	1
	2.	$2 \equiv 6 \equiv 0\ [mod\ 2]$ et $3 \equiv 1\ [mod\ 2]$ Alors, pour tout entier naturel n non nul, $2^n \equiv 6^n \equiv 0\ [mod\ 2]$ et $3^n \equiv 1\ [mod\ 2]$ Par conséquent, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 0 + 1 + 0 - 1 \equiv 0\ [mod\ 2]$ Pour tout entier naturel n non nul, u_n est donc pair.	2
	3.	pour tout entier naturel k non nul, posons $n = 2k$, alors $u_{2k} = 2^{2k} + 3^{2k} + 6^{2k} - 1 = 4^k + 9^k + 36^k - 1$ $4 \equiv 36 = 4\times 9 \equiv 0\ [mod\ 4]$ et $9 = 4\times 2 + 1 \equiv 1\ [mod\ 4]$ alors, pour tout entier naturel k non nul, $4^k \equiv 36^k \equiv 0\ [mod\ 4]$ et $9^k \equiv 1\ [mod\ 4]$ Par conséquent, pour tout entier naturel k non nul, $u_{2k} = 4^k + 9^k + 36^k - 1 \equiv 0 + 1 + 0 - 1 \equiv 0\ [mod\ 4]$ Pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est donc divisible par 4.	2
Exercice 2.	**1.**	$3^3 = 27 = 13\times 2 + 1 \equiv 1\ [13]$	0,5
		Pour tout entier naturel n, $3^{3n} = (3^3)^n \equiv 1\ [13]$, le reste de la division euclidienne de 3^{3n} par 13 est donc 1.	1
		Pour tout entier naturel n, $3^{3n} \equiv 1\ [13]$ donc $(3^{3n})^2 = 3^{6n} \equiv 1\ [13]$ et donc $3^{6n+2} \equiv 9\ [13]$ d'autres parts, $3^{3n} \equiv 1\ [13]$ donc $3^{3n+1} \equiv 3\ [13]$ et donc $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 \equiv 9 + 3 + 1\ [13]$ $\equiv 13\ [13] \equiv 0\ [13]$ Pour tout entier naturel n, $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est donc un multiple de 13.	1,5
	2.	$11 \equiv 4\ [7]$ $11^2 = 121 = 17\times 7 + 2 \equiv 2\ [7]$ $11^3 = 11^2\times 11 \equiv 2\times 11\ [7] \equiv 22 = 3\times 7 + 1 \equiv 1\ [7]$ $(11^3)^{672} = 11^{2016} \equiv 1\ [7]$ Par conséquent, $11^{2017} = 11^{2016}\times 11 \equiv 1\times 11\ [7] \equiv 11\ [7] \equiv 4\ [7]$ Le reste de la division euclidienne de $N = 11^{2017}$ par 7 est donc 4.	2

Exercice 3.	1.	$A^2=\begin{pmatrix}-4&6\\-3&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4&6\\-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&6\\-3&7\end{pmatrix}$ $A+2I_2=\begin{pmatrix}-4&6\\-3&5\end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&6\\-3&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&6\\-3&7\end{pmatrix}$ On a donc $A^2=A+2I_2$	2
		$A^3=A\times A^2=A\times(A+2I_2)=A^2+2A=A+2I_2+2A=3A+2I_2$ $A^4=A\times A^3=A\times(3A+2I_2)=3A^2+2A=3(A+2I_2)+2A$ $=3A+6I_2+2A=5A+6I_2$	2
		$B=\begin{pmatrix}0&a\\b&c\end{pmatrix}$ $B^2=\begin{pmatrix}0&a\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a\\b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab&ac\\bc&ab+c^2\end{pmatrix}=A^2=\begin{pmatrix}-2&6\\-3&7\end{pmatrix}$ $\begin{cases}ab=-2\\ac=6\\bc=-3\\ab+c^2=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=-2\\ac=6\\bc=-3\\-2+c^2=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=-2\\ac=6\\bc=-3\\c^2=9\end{cases}$ Si $c=3$ alors $\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$ et $B=\begin{pmatrix}0&2\\-1&3\end{pmatrix}$ Si $c=-3$ alors $\begin{cases}a=-2\\b=1\end{cases}$ et $B=\begin{pmatrix}0&-2\\1&-3\end{pmatrix}$	1
	2.	$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $C^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ $C^3=\begin{pmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ $C^4=\begin{pmatrix}1&4&10\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$	1

		Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie « $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ », pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Initialisation pour $n = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & n & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C = C^1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $C^{n+1} = C \times C^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & u_n + n + 1 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Par conséquent $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.	2

	3.	Déterminer toutes les matrices carrées, de dimensions 2, D telles que $D^2 = I_2$. $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $D^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{pmatrix}$ $D^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a^2+bc=1 \\ (a+d)b=0 \\ (a+d)c=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases}$ **Cas n°1 :** Si $a+d=0$ alors $a=-d$ soit $a^2=d^2$ donc $a^2+bc=1$ Et alors soit $b=0$ et $a=\pm 1=-d$ et donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ où $c \in \mathbb{R}$ ou $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ où $c \in \mathbb{R}$ soit $b \neq 0$ et $c = \frac{1-a^2}{b}$ $D = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ où a, b $\in \mathbb{R}$ **Cas n°2 :** Si $a+d \neq 0$ alors $b=0$ et $c=0$ et donc $a=\pm 1=d$ D'où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et ces deux cas sont déjà inclus dans le cas n°1. ou $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ ou $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	2