EXERCICE 1. (4 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice identité.

▶1. Calculer A^3.

▶2. Développer le produit : $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$.

▶3. Que peut-on en déduire à propos de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

EXERCICE 2. (4 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & x \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ où x est un réel quelconque.

▶1. Calculer, en fonction de x, la matrice A^2.

▶2 a) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x on a l'égalité $A^4 = I_2$.

b) Pour les valeurs de x précédentes, que peut-on dire de la matrice A ?

▶3. On pose $B = A^2$. Déterminer l'inverse de la matrice B.

EXERCICE 3. (5 points)

Le service hotline d'une société de téléphonie reçoit trois types d'appels :

- des appels concernant les factures et résiliations notés F,
- des appels pour les offres commerciales notées C,
- des appels pour les problèmes techniques notés T.

Une étude a montré qu'en moyenne un appel F nécessite 5 min au standard, un appel C nécessite 2 min au standard et 10 min avec un employé spécialisé et un appel T nécessite 3 min au standard et 7 min avec un employé spécialisé.

Au cours de la dernière heure, la hotline a reçu 122 appels, les standardistes ont été actifs durant 440 min et les employés spécialisés durant 580 min.

On note x (respectivement y et z) le nombre d'appels F (respectivement C et T) reçus au cours de la dernière heure.

▶1. Traduire les données de l'énoncé par un système d'équations.

▶2. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ecrire le système sous la forme $A \times X = B$ où les matrices B et A sont à préciser.

▶3. Résoudre alors le système.

EXERCICE 4. (7 points)

PARTIE A.

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.

Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x + 5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).

Exemple : M correspond à $x = 12$

$7\times12 + 5 = 89$

or $89 \equiv 11\ [26]$ et 11 correspond à la lettre L, donc la lettre M est codée par la lettre L.

▶ 1. Coder la lettre L.

▶ 2. Démontrer que $y \equiv 7x + 5\ [26]$ si, et seulement si, $x \equiv 15y + 3\ [26]$

▶ 3. À l'aide de la question précédente décoder la lettre F.

PARTIE B.

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté. Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A. Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique « 2 » fois le chiffrement affine à la lettre M, « 2 » fois le chiffrement à la lettre A, « 5 » fois le chiffrement à la lettre T et enfin « 6 » fois le chiffrement à la lettre H. On obtient EOSN.

Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6.

Décoder le mot IYYQ.