BACCALAUREAT BLANC

Session 2017

MATHEMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 9**

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

L'usage de la calculatrice est autorisé conformément à la réglementation en vigueur.

(Une seule calculatrice par candidat).

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte 5 pages.

Exercice 1 – [5 points]

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Proposition 1 :
L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-4|=|z+2i|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe $1+i$.

Soit (E) l'équation $(z-1)(z^2-8z+25)=0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Proposition 2 :
Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3 :
$\frac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2017}$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $1+i, -2i$ et 4.
Proposition 4 :
On a alors $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Si z est un nombre complexe, on note $\bar{z}$ le nombre complexe conjugué du nombre z.
Proposition 5
L'équation $(2+i)\times z+z\times\bar{z}=18-2i+i\times\bar{z}$ admet $3-i$ comme unique solution dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 – [6 points]

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1. Avec le parachute qui s'ouvre
On suppose, dans cette partie, que le parachute fonctionne correctement.
Soit v_1 la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$v_1(t)=5\times\frac{e^{0,3t}-1}{e^{0,3t}+1}.$$

▶1a) Déterminer la limite de $v_1(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
b) Déterminer, en justifiant, le sens de variation de la fonction v_1.
▶2. On admet que, t secondes après qu'il a été lâché et tant qu'il n'a pas atteint le sol, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale à $v_1(t)$. On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s^{-1}. Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie 2. Avec le parachute qui ne s'ouvre pas
On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.
On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en $\mathrm{m.s^{-1}}$), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $v_2(t)=32,7(1-e^{-0,3t})$.
On admet que la fonction v_2 est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
▶1a) Quelle est la vitesse, exprimée en m.s^{-1}, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à 0,1 m.s^{-1}.

b) Quelle est la valeur limite de v_2 ?

▶2. On propose l'algorithme suivant :

```
T prend la valeur 0
V prend la valeur .....
Tant que V .... 30
    T prend la valeur T ..... 0,1
    V prend la valeur 32,7(1 − e^(−0,3T))
Fin Tant que
Afficher ......
```

a) On admet que l'équation $v_2(t) = 30$ admet une unique solution positive notée α. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche une valeur approchée à 10^{-1} près de α, solution de l'équation $v_2(t) = 30$ m.s^{-1}.

b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

▶3. On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis t secondes après que le colis a été lâché par le passager est donnée, pour tout $t \in [0; +\infty[$, par :

$$d(t) = 109(e^{-0,3t} + 0,3t - 1).$$

a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$d'(t) = v_2(t).$$

b. On sait que la chute du colis dure 20 secondes. Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la hauteur à laquelle il a été lâché par l'hélicoptère.

▶4. a) Démontrer que l'équation $d(t) = 700$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.

b) Déterminer alors un encadrement d'amplitude 0,1 s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.

Exercice 3 – [4 points]

Les parties sont indépendantes. Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1.

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1% des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale.

En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4% de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.

On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :

R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,

D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

▶1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

▶2. a) Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.

b) La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité qu'elle habite en zone rurale ?

Partie 2.

Dans un village classé en **zone rurale**, un organisme de santé prélève, de façon aléatoire, un échantillon de 100 personnes que l'on peut assimiler à un tirage avec remise.

▶1. Quelle est la probabilité que cet échantillon contienne 9 personnes atteintes de diabète ?

►2. L'organisme de santé dénombre dans son échantillon 9 personnes atteintes de diabète. Le statisticien se demande s'il n'y a pas erreur sur la provenance du prélèvement.
Donner un intervalle de fluctuation au seuil de 95% du nombre de personnes atteintes de diabète dans un échantillon de 100 habitants du village. On pourra éventuellement utiliser les données des tableaux suivants.

Tableau n°1 : lorsque X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}064$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	$P(X \leq k)$	0,0013	0,0105	0,0416	0,1109	0,2259	0,3768	0,5403	0,6903	0,8096	0,8929	0,9448	0,9738	0,9885	0,9954	0,9983	0,9994

Tableau n°2 : lorsque X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}099$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	$P(X \leq k)$	0,0021	0,0085	0,0255	0,0613	0,1235	0,2154	0,3327	0,4645	0,5963	0,7148	0,8114	0,8832	0,9322	0,9631	0,9811	0,9909

Tableau n°3 : lorsque X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}082865$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	$P(X \leq k)$	0,0088	0,0297	0,0755	0,1549	0,2684	0,4062	0,5509	0,6846	0,7945	0,8758	0,9302	0,9635	0,9822	0,9919	0,9965	0,9986

Que répondre au statisticien de l'organisme de santé ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 – [5 points]

Le but de cet exercice est d'étudier, sur un exemple, une méthode de chiffrement publiée en 1929 par le mathématicien et cryptologue Lester Hill. Ce chiffrement repose sur la donnée d'une matrice A, connue uniquement de l'émetteur et du destinataire.

Dans tout l'exercice, on note A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Partie A – Chiffrement de Hill

Voici les différentes étapes de chiffrement pour un mot comportant un nombre pair de lettres :

<table>
<tr><td>Étape 1</td><td>On divise le mot en blocs de deux lettres consécutives puis, pour chaque bloc, on effectue chacune des étapes suivantes.</td></tr>
<tr><td>Étape 2</td><td>On associe aux deux lettres du bloc les deux entiers x_1 et x_2 tous deux compris entre 0 et 25, qui correspondent aux deux lettres dans le même ordre, dans le tableau suivant :

<table>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td><td>F</td><td>G</td><td>H</td><td>I</td><td>J</td><td>K</td><td>L</td><td>M</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>N</td><td>O</td><td>P</td><td>Q</td><td>R</td><td>S</td><td>T</td><td>U</td><td>V</td><td>W</td><td>X</td><td>Y</td><td>Z</td></tr>
<tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Étape 3</td><td>On transforme la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vérifiant $Y = AX$.</td></tr>
<tr><td>Étape 4</td><td>On transforme la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 celui de la division euclidienne de y_2 par 26.</td></tr>
<tr><td>Étape 5</td><td>On associe aux entiers r_1 et r_2 les deux lettres correspondantes du tableau de l'étape 2.
Le bloc chiffré est le bloc obtenu en juxtaposant ces deux lettres.</td></tr>
</table>

Question : utiliser la méthode de chiffrement exposée pour chiffrer le mot « HILL ».

Partie B - Quelques outils mathématiques nécessaires au déchiffrement

▶1. Soit a un entier, afin de déterminer s'il existe un entier u entre 0 et 25 tel que $u \times a \equiv 1 \ modulo\ 26$, nous considérons l'algorithme suivant :

```
Lire a
Pour u allant de 0 à 25
    r prend la valeur u×a
    Tant que r > 26
        r prend la valeur r − 26
    Fin du Tant que
    Si r = 1
    Alors
        Afficher u
    Fin du Si
Fin du Pour
```

On entre la valeur $a = 21$ dans cet algorithme.

a. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant, jusqu'à l'affichage d'une valeur.

u	0	1	2	3	4	...
	0	21	42	...	...	
			16	...	...	
r				...	...	
					...	

b. En déduire une valeur de u telle que $u \times 21 \equiv 1 \ modulo\ 26$.

▶2. On rappelle que A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice $12A - A^2$.

b. En déduire la matrice B telle que $B \times A = 21 \times I$.

c. Démontrer que si $AX = Y$ alors $21X = BY$.

Partie C - Déchiffrement

On veut déchiffrer le mot VLUP.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la matrice associée, selon le tableau de correspondance, à un bloc de deux lettres avant chiffrement, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la matrice définie par l'égalité : $Y = AX = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} X$.

Si r_1 et r_2 sont les restes respectifs de y_1 et y_2 dans la division euclidienne par 26, le bloc de deux lettres après chiffrement est associé à la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

▶1. Démontrer que : $\begin{cases} 21x_1 = 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 = -7y_1 + 5y_2 \end{cases}$

▶2. En utilisant la question B.1., établir que : $\begin{cases} x_1 \equiv 9\,r_1 + 16\,r_2 \ modulo\ 26 \\ x_2 \equiv 17\,r_1 + 25\,r_2 \ modulo\ 26 \end{cases}$

▶3. Déchiffrer le mot VLUP, associé aux matrices $\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.