<table>
<tr><td rowspan="3">Exercice 1.</td><td>P1</td><td>
<u>Méthode n°1 :</u> Posons $z = x + iy$

$$|x + iy - 4| = |x + iy + 2i|$$
$$\Leftrightarrow |(x - 4) + iy| = |x + i(y + 2)|$$
$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 + y^2 = x^2 + (y + 2)^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4$$
$$\Leftrightarrow -8x + 12 = 4y$$
$$\Leftrightarrow y = -2x + 3$$

L'ensemble des points M du plan est donc la droite d'équation $y = -2x + 3$.
Le point A d'affixe $1 + i$ appartient à cette droite car $y = -2\times 1 + 3 = 1$.
La proposition n°1 est donc vraie.

<u>Méthode n°2 :</u>
Posons B et C les points d'affixes respectives $-2i$ et 4.

$$|z - 4| = |z + 2i|$$
$$\Leftrightarrow |z_M - z_C| = |z_M - z_B|$$
$$\Leftrightarrow MC = MB$$

L'ensemble des points M du plan est donc l'ensemble des points équidistants de B et de C, soit la médiatrice du segment $[BC]$. C'est donc une droite.
De plus $\begin{cases} |z - 4| = |1 + i - 4| = |-3 + i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \\ |z + 2i| = |1 + i + 2i| = |1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \end{cases}$
Le point A appartient bien à cette droite.
La proposition n°1 est donc vraie.
</td></tr>
<tr><td>P2</td><td>
$$(z - 1)(z^2 - 8z + 25) = 0$$
$$z - 1 = 0 \text{ ou bien } z^2 - 8z + 25 = 0$$
$$\Delta = 64 - 4\times 25 = -36 < 0$$
$$z = 1 \qquad \text{Il y a alors deux solutions complexes}$$
$$z = 1 \quad \text{ou} \quad z = \frac{8-6i}{2} = 4 - 3i \quad \text{ou} \quad z = \frac{8+6i}{2} = 4 + 3i$$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 4 - 3i$ et $z_C = 4 + 3i$.
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 4 - 3i - 1 = 3 - 3i$
$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 4 + 3i - 1 = 3 + 3i$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times 3 - 3\times 3 = 9 - 9 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Le triangle ABC est donc un triangle rectangle en A.
La proposition n°2 est donc vraie.
</td></tr>
<tr><td>P3</td><td>
Déterminons d'abord la forme exponentielle de $-\sqrt{3} + i$:
$|-\sqrt{3} + i| = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$
donc $-\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$
On a alors $\left(-\sqrt{3} + i\right)^{2017} = \left(2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2017} = 2^{2017}\,e^{i\frac{5\pi\times 2017}{6}}$

$$\arg\left(\left(-\sqrt{3} + i\right)^{2017}\right) = \frac{10\,085\pi}{6} \quad [2\pi]$$
$$\arg\left(\left(-\sqrt{3} + i\right)^{2017}\right) = \frac{840\times 12\pi + 5\pi}{6} \quad [2\pi]$$
$$\arg\left(\left(-\sqrt{3} + i\right)^{2017}\right) = 840\times 2\pi + \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$$
$$\arg\left(\left(-\sqrt{3} + i\right)^{2017}\right) = \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$$

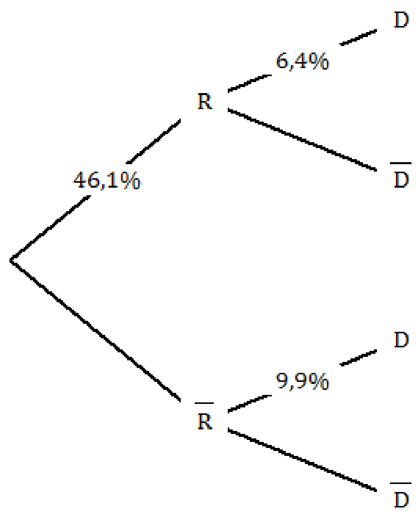
La proposition n°3 est donc fausse.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>P4</td><td>$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-2i-1-i}{4-1-i} = \frac{-1-3i}{3-i}$
$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(-1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{-3-i-9i-3i^2}{9-i^2} = \frac{-3-i-9i+3}{9+1} = \frac{-10i}{10} = -i$
On a alors $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
La proposition n°4 est donc fausse.</td></tr>
<tr><td></td><td>P5</td><td>$(2+i)\times z + z\times\bar{z} = 18 - 2i + i\times\bar{z}$
$\Leftrightarrow (2+i)\times(x+iy) + |z|^2 = 18 - 2i + i\times(x-iy)$
$\Leftrightarrow 2x + 2iy + ix - y + x^2 + y^2 = 18 - 2i + ix + y$
$\Leftrightarrow 2x - y + x^2 + y^2 + i(2y+x) = 18 + y + i(x-2)$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + x^2 + y^2 = 18 + y \\ 2y + x = x - 2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + x^2 + y^2 = 18 + y \\ y = -1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 + x^2 + 1 = 18 - 1 \\ y = -1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 15 = 0 \\ y = -1 \end{cases}$
$\Delta = 4 - 4\times(-15) = 64 >$
Il y a alors deux solutions réelles
$x = \frac{-2-8}{2} = -5$ ou $x = \frac{-2+8}{2} = 3$

L'équation admet donc deux solutions complexes $3 - i$ et $-5 - i$.
La proposition n°5 est donc fausse.</td></tr>
<tr><td>Exercice 2. Partie 1.</td><td>1.</td><td>$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} e^{0,3t} - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{0,3t} + 1 = +\infty\end{array}\right\}$ par quotient, la forme est indéterminée
$\forall t \geq 0,\quad \frac{e^{0,3t}-1}{e^{0,3t}+1} = \frac{e^{-0,3t}(e^{0,3t}-1)}{e^{-0,3t}(e^{0,3t}+1)} = \frac{1-e^{-0,3t}}{1+e^{-0,3t}}$
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} 1 - e^{-0,3t} = 1 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} 1 + e^{-0,3t} = 1\end{array}\right\}$ par quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1-e^{-0,3t}}{1+e^{-0,3t}} = 1$
On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} v_1(t) = 5$.
<hr>$\forall t \geq 0, v_1(t) = 5\times\frac{e^{0,3t}-1}{e^{0,3t}+1} = \frac{u}{v}$
$u = e^{0,3t} - 1 \quad u' = 0,3\, e^{0,3t}$
$v = e^{0,3t} + 1 \quad v' = 0,3\, e^{0,3t}$
$\forall t \geq 0, v'_1(t) = 5\times\frac{u'v - uv'}{v^2} = 5\times\frac{0,3\, e^{0,3t}(e^{0,3t}+1) - (e^{0,3t}-1)0,3\, e^{0,3t}}{(e^{0,3t}+1)^2}$
$v'_1(t) = 5\times\frac{0,3\, e^{0,6t} + 0,3\, e^{0,3t} - 0,3\, e^{0,6t} + 0,3\, e^{0,3t}}{(e^{0,3t}+1)^2} = 5\times\frac{0,3\, e^{0,3t} + 0,3\, e^{0,3t}}{(e^{0,3t}+1)^2}$
$v'_1(t) = 5\times\frac{0,6\, e^{0,3t}}{(e^{0,3t}+1)^2} > 0$ car $e^{0,3t} > 0$ et $(e^{0,3t}+1)^2 > 0$
La fonction v_1 est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.</td></tr>
<tr><td></td><td>2.</td><td>La fonction v_1 est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} v_1(t) = 5$.
On peut en déduire que $\forall t \geq 0, v_1(t) \leq 5 < 6$.
Le colis ne sera donc pas endommagé.</td></tr>
<tr><td>Exercic</td><td>1.</td><td>$v_2(10) = 32,7(1 - e^{-0,3\times10}) = 32,7(1 - e^{-3}) \approx 31,1\ m.s^{-1}$</td></tr>
</table>

		$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,3t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} v_2(t) = 32{,}7$.

	2.	T prend la valeur 0
		V prend la valeur 0
		Tant que $V < 30$
		    T prend la valeur $T + 0{,}1$
		    V prend la valeur $32{,}7(1 - e^{-0,3T})$
		Fin Tant que
		Afficher T

		En utilisant l'algorithme précédent, une valeur approchée de α à 10^{-1} près est 8,4.
	3.	$\forall t \geq 0, d'(t) = 109(-0{,}3 \times e^{-0,3t} + 0{,}3) = -32{,}7e^{-0,3t} + 32{,}7 = v_2(t)$
		$d(20) = 109(e^{-0,3\times 20} + 0{,}3\times 20 - 1) = 109(e^{-6} + 5) \approx 545\ m$
	4.	La fonction d est dérivable et donc continue sur $[0; +\infty[$. De plus, $d(20) \approx 545 < 700$ $\lim\limits_{t\to+\infty} d(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 109(e^{-0,3t} + 0{,}3t - 1) = +\infty > 700$ D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $d(t) = 700$ admet au moins une solution sur $[0; +\infty[$. D'autre part, la fonction v_2 est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et $v_2(0) = 0$. $\forall t > 0, d'(t) = v_2(t) > 0$ La fonction d est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$. L'équation $d(t) = 700$ admet donc une solution unique sur $[0; +\infty[$.
		En utilisant la calculatrice, le temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres est compris entre 24,7 et 24,8 secondes.
Exercice 3. Partie 1.	**1.**	
	2.	$P(D) = P(R \cap D) + P(\bar{R} \cap D) = \frac{46{,}1}{100} \times \frac{6{,}4}{100} + \left(1 - \frac{46{,}1}{100}\right) \times \frac{9{,}9}{100} = 0{,}082865 \approx 0{,}083$
		$P_D(R) = \frac{P(R \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}461 \times 0{,}064}{0{,}082865} \approx 0{,}356$

Exercice 3. Partie 2.	**1.**	On répète 100 fois de façon identique et indépendante le schéma de Bernoulli où une réussite correspond à une personne diabétique de probabilité 0,064. La variable aléatoire X, nombre de personnes diabétiques, suit alors une loi binomiale de paramètre 100 et 0,064 : $X \hookrightarrow B(100; 0{,}064)$ donc $$P(X=9) = \binom{100}{9} \times 0{,}064^9 \times 0{,}936^{91} \approx 0{,}083$$
	2.	En utilisant le tableau n°1, $P(X \leq 1) \approx 0{,}0105$ et $P(X \leq 12) \approx 0{,}9885$ donc $$P(2 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X < 2) \approx 0{,}9885 - 0{,}0105 \approx 0{,}978$$ Un intervalle de fluctuation au seuil de 95% du nombre de personnes atteintes de diabète est $[2; 12]$. L'organisme de santé dénombre dans son échantillon 9 personnes atteintes de diabète, ce nombre de diabétiques est dans l'intervalle de fluctuation, l'organisme de santé ne peut tirer aucune conclusion.
Exercice 4. Partie A.	**1.**	On conjecture que la suite est croissante et qu'elle converge vers 5.
	2.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 5 - 4\times 0{,}8^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Initialisation pour $n = 0$: $u_0 = 1$ et $5 - 4\times 0{,}8^n = 5 - 4\times 0{,}8^0 = 5 - 4 = 1$ donc $u_0 = 5 - 4\times 0{,}8^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 5 - 4\times 0{,}8^n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1$ $u_{n+1} = 0{,}8(5 - 4\times 0{,}8^n) + 1$ $u_{n+1} = 4 - 4\times 0{,}8^{n+1} + 1$ $u_{n+1} = 5 - 4\times 0{,}8^{n+1}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Par conséquent : $u_n = 5 - 4\times 0{,}8^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
	3.	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (5 - 4\times 0{,}8^n) = 5$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$ puisque $\lvert 0{,}8 \rvert < 1$. La suite est donc bien convergente vers 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (5 - 4\times 0{,}8^{n+1}) - (5 - 4\times 0{,}8^n)$ $$u_{n+1} - u_n = 5 - 4\times 0{,}8^{n+1} - 5 + 4\times 0{,}8^n$$ $$u_{n+1} - u_n = 4\times 0{,}8^n(-0{,}8 + 1) = 4\times 0{,}8^n \times 0{,}2 > 0$$ La suite est donc bien strictement croissante.
		La population d'abeille va croitre et au fur et à mesure que les années passent, le nombre d'abeilles va s'approcher de 50 000.
	4.	$$u_n > 4{,}99$$ $$\Leftrightarrow 5 - 4\times 0{,}8^n > 4{,}99$$ $$\Leftrightarrow -4\times 0{,}8^n > -0{,}01$$ $$\Leftrightarrow 0{,}8^n < \frac{-0{,}01}{-4}$$ $$\Leftrightarrow \ln(0{,}8^n) < \ln(0{,}0025)$$ $$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}0025)}{\ln(0{,}8)} \approx 26{,}85$$ Par conséquent, à partir de $n = 27$, on a $u_n > 4{,}99$.
Exercice 4. Partie B	**1.**	Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c \neq 0$ $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 5c}{v_n} = \frac{0{,}8u_n + c - 5c}{u_n - 5c} = \frac{0{,}8u_n - 4c}{u_n - 5c} = \frac{0{,}8\left(u_n - \frac{4c}{0{,}8}\right)}{u_n - 5c} = \frac{0{,}8(u_n - 5c)}{u_n - 5c}$$ $= 0{,}8$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,8 et $v_0 = u_0 - 5c = 1 - 5c$

2. On en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_n = (1-5c)\times 0{,}8^n$.

3. Par conséquent, pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 5c = (1-5c)\times 0{,}8^n + 5c$.
Et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (1-5c)\times 0{,}8^n + 5c = 5c$.
L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000 soit 10 dizaines de milliers. On choisit alors $5c = 10$ soit $c = 2$

Spé. Partie A.

	Bloc n°1	Bloc n°2
Étape 1	HI	LL
Étape 2	$x_1 = 7$ et $x_2 = 8$	$x_1 = 11$ et $x_2 = 11$
Étape 3	$X = \begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = AX$ $Y = \begin{pmatrix}5 & 2\\7 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix}51\\105\end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = AX$ $Y = \begin{pmatrix}5 & 2\\7 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix}77\\154\end{pmatrix}$
Étape 4	$51 = 26 + 25$ donc $51 \equiv 25\ [26]$ $105 = 4\times 26 + 1$ donc $105 \equiv 1\ [26]$ $R = \begin{pmatrix}25\\1\end{pmatrix}$	$77 = 2\times 26 + 25$ donc $77 \equiv 25\ [26]$ $154 = 5\times 26 + 24$ donc $154 \equiv 24\ [26]$ $R = \begin{pmatrix}25\\24\end{pmatrix}$
Étape 5	ZB	ZY

Le mot chiffré est donc ZBZY.

Spécialité. Partie B.

1.

u	0	1	2	3	4	5
r	0	21	42	63	84	105
			16	37	58	79
				11	32	53
					6	27
						1

On en déduit que $5\times 21 \equiv 1$ *modulo* 26.

2.
$$12A - A^2 = 12\times\begin{pmatrix}5 & 2\\7 & 7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5 & 2\\7 & 7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5 & 2\\7 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60 & 24\\84 & 84\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}39 & 24\\84 & 63\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}21 & 0\\0 & 21\end{pmatrix} = 21\times I$$

$$12A - A^2 = 21\times I$$
$$(12\times I - A)\times A = 21\times I$$
La matrice B telle que $B\times A = 21\times I$ est donc
$B = 12\times I - A = \begin{pmatrix}12 & 0\\0 & 12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5 & 2\\7 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & -2\\-7 & 5\end{pmatrix}$.

		Supposons que $AX = Y$ alors $B\times AX = B\times Y$ et donc $21\times I\times X = B\times Y$ soit $21X = BY$.
Spécialité. Partie C.	**1.**	$Y = AX$ donc $21X = BY = 21\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ On a donc $\begin{cases} 21x_1 = 7y_1 - 2y_2 \\ 21x_2 = -7y_1 + 5y_2 \end{cases}$
	2.	Or puisque $5\times 21 \equiv 1 \; modulo \; 26$ $x_1 \equiv 5\times 21x_1 \; [26]$ $x_1 \equiv 35y_1 - 10y_2 \; [26]$ $x_1 \equiv 9y_1 + 16y_2 \; [26]$ Or $y_1 \equiv r_1 \; [26]$ et $y_2 \equiv r_2 \; [26]$ donc $x_1 \equiv 9r_1 + 16r_2 \; [26]$ D'autre part $x_2 \equiv 5\times 21x_2 \; [26]$ $x_2 \equiv -35y_1 + 25y_2 \; [26]$ donc $x_2 \equiv 17r_1 + 25r_2 \; [26]$
	3.	$\begin{pmatrix} r_1 = 21 \\ r_2 = 11 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x_1 \equiv 9\,r_1 + 16\,r_2 \equiv 365\;[26] \equiv 1\;[26] \\ x_2 \equiv 17\,r_1 + 25\,r_2 \equiv 632\;[26] \equiv 8\;[26] \end{cases}$ Le bloc VL se décode en BI $\begin{pmatrix} r_1 = 20 \\ r_2 = 15 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x_1 \equiv 9\,r_1 + 16\,r_2 \equiv 420\;[26] \equiv 4\;[26] \\ x_2 \equiv 17\,r_1 + 25\,r_2 \equiv 715\;[26] \equiv 13[26] \end{cases}$ Le bloc UP se décode en EN Le mot initial est donc BIEN.