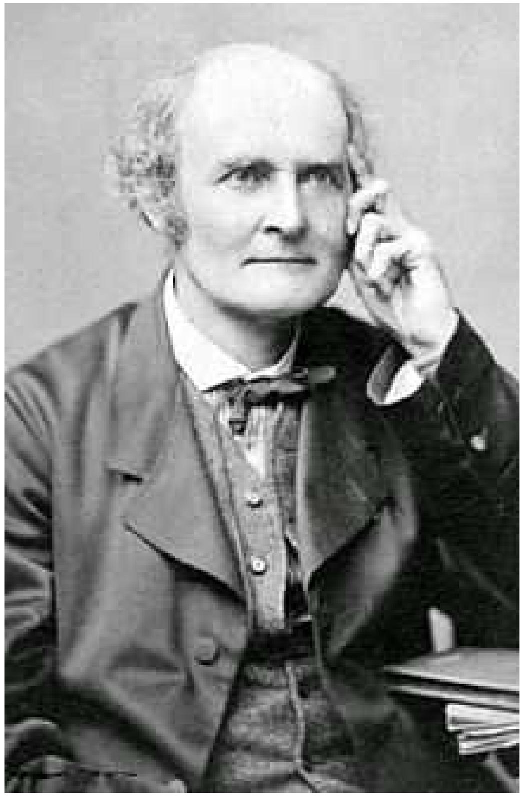
Arthur Cayley (1821 - 1895)



Mathématicien britannique, il fait partie des fondateurs de l'école britannique moderne de mathématiques pures. Il est considéré comme l'inventeur des matrices. Dès 1854, il a posé les bases de la théorie des groupes et il établit la notion d’espace vectoriel. Son nom est attaché à de nombreuses notions, dont l’algèbre des octonions.

I. Notion de matrice

Soit n et p deux nombres entiers naturels non nuls.
On appelle matrice un tableau de nombres réels répartis en n lignes et p colonnes.

Soit une matrice à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$$

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$a_{11} = \cdots$

$a_{23} = \cdots$

$a_{32} = \cdots$

$a_{33} = \cdots$

M est une matrice carrée.

Vocabulaire

$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale

$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne

$\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice unité

La transposée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est $\;{}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

II. Opérations sur les matrices

Définition :

Soit A et B deux matrices à n lignes et p colonnes et λ un nombre réel.

❶ $\lambda \times A$ est la matrice où chaque élément de A est multiplié par λ.
❷ $A + B$ est la matrice où l'on ajoute les éléments de A avec ceux de B qui sont sur la même ligne et la même colonne.

Exemple : Calculer $A + 2B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriétés.

Soit A, B et C trois matrices à n lignes et p colonnes,
λ et λ' deux nombres réels

commutativité : $A + B = B + A$

associativité : $(A + B) + C = A + (B + C)$

distributive :

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \lambda')A = \lambda A + \lambda' A$$

$$\lambda(\lambda' A) = (\lambda\lambda')A$$

Définition :

Soit A à n lignes et p colonnes et B à p lignes et q colonnes.
Le produit des matrices A et B est la matrice

$$A\times B = (c_{ik})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq k\leq q}}$$ à n lignes et q colonnes telle que :

$$c_{ik} = a_{i1}\times b_{1k} + a_{i2}\times b_{2k}+\dots+a_{ip}\times b_{pk}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{ip}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{matrix}} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ik}} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer, lorsque c'est possible, $A\times B$, $B\times A$ et A^2.

Propriétés.

Soit A, B et C trois matrices qui rendent possibles les opérations suivantes,

associativité : $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$

distributive : $$(A+B)\times C = A\times C + B\times C$$
$$A\times(B+C) = A\times B + A\times C$$

ATTENTION

La multiplication de matrices n'est pas commutative

en général : $\boldsymbol{A \times B \neq B \times A}$

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer $A \times B$ et $B \times A$. Qu'observe-t-on ?

Propriété :

Pour toute matrice carrée A d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A \times I_n = I_n \times A = A$$

où I_n est la matrice unité (ou identité) d'ordre n.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, calculer $A \times I_2$ et $I_2 \times A$.

III. Matrice inverse d'une matrice carrée

Un artisan chocolatier propose deux types de chocolats : le noir intense et le fruité.

La fabrication d'une plaque :

- de noir intense nécessite 30 minutes de travail et 700 g de cacao ;
- de fruité nécessite 20 minutes de travail et 400 g de cacao.

Ce mois-ci, l'artisan a consacré 12 heures et 40 minutes de travail et 16,8 kg de cacao à la fabrication de ces deux types de chocolat.

PARTIE A : avec un système d'équations

On note x le nombre de plaques de noir intense et y le nombre de plaques de fruité fabriquées dans le mois par cet artisan.

Traduire l'énoncé par un système d'équation et le résoudre.

PARTIE B : avec le calcul matriciel

On considère les matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 760 \\ 16\,800 \end{pmatrix}$.

Ecrire le système de la partie A sous la forme $A \times X = B$ où la matrice A est à préciser.

Déterminer une matrice $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $A' \times A = I_2$.

Cette matrice A' s'appelle **la matrice inverse** de A, on la note A^{-1}.

Résoudre alors le problème.

Une entreprise spécialisée dans les énergies renouvelables pour les particuliers propose trois types d'installation.

L'installation :

- panneaux solaires : 2,5 jours main-d'œuvre et 350 kg de matériel
- chauffe-eau solaire : 1 jour de main-d'œuvre et 120 kg de matériel
- éolienne : 1,5 jour de main-d'œuvre et 90 kg de matériel

Cette année, cette entreprise a réalisé 156 installations, qui ont nécessité 306 jours de main-d'œuvre et 39 160 kg de matériel.
Combien d'installation de chaque type, l'entreprise a-t-elle effectuées cette année ?

Définition : Soit A une matrice carré d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$
On dit que A est inversible lorsqu'il existe une matrice carré A' d'ordre n telle que $A' \times A = A \times A' = I_n$. On dit alors que A' est la matrice inverse de A et on la note A^{-1}.

Propriété :
Lorsqu'elle existe, la matrice A^{-1} est unique.
Démonstration :

Exemple : Déterminer, si elle existe, l'inverse des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 + 5A$.

En déduire que la matrice A est inversible. Précisez son inverse.

Propriété :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2, non nulle,

A est inversible si, et seulement si, le déterminant $ad - cb$ est non nul.

Démonstration :

Exemple :

Soit S le système d'équations de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 5x - 3y = -1 \end{cases}$

Traduire ce système par l'écriture matricielle $A \times X = B$.

Résoudre le système.

Propriété :

Si A est une matrice carrée inversible alors le système d'équations $A \times X = B$ admet une unique solution : $X = A^{-1} \times B$.

IV. Puissance p^e d'une matrice carrée

Définition :

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^2 = A \times A$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p \text{ fois}}$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer A^2, A^3 puis A^4.

En déduire A^p où $p \in \mathbb{N}^*$.

Propriété :

Soit D une matrice diagonale d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D = \left(d_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \text{ où } d_{ij} = 0 \text{ lorsque } i \neq j$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, D^p est une matrice diagonale où

$$D^p = \left(d_{ij}^p\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \text{ où } d_{ij} = 0 \text{ lorsque } i \neq j$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^2 puis A^3.

Démonstration dans le cas où $\boldsymbol{n = 2}$: