Exercice 1.	1.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie « $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6 », pour tout $n \in \mathbb{N}$. Initialisation pour $n = 0$: $n(n+1)(2n+1) = 0$ est divisible par 6 donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6 pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) = (n+1)(n+2)(2n+2+1)$ $= (n+1)(n+2)(2n+3) = (n^2+2n+n+2)(2n+3)$ $= (n^2+3n+2)(2n+3) = 2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6$ $= 2n^3+9n^2+13n+6$ Or $n(n+1)(2n+1) = (n^2+n)(2n+1)$ $= 2n^3+n^2+2n^2+n = 2n^3+3n^2+n$ est divisible par 6 Et $(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) = 2n^3+9n^2+13n+6$ $= \underbrace{(2n^3+3n^2+n)}_{divisible\ par\ 6\ par\ supposition} + (6n^2+12n+6)$ $6n^2+12n+6 = 6\times(n^2+2n+1)$ est divisible par 6 On en déduit que $(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)$ est divisible par 6 donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Par conséquent $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

	2.	<u>1^{re} méthode :</u> Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie « $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 », pour tout $n \in \mathbb{N}$. Initialisation pour $n = 0$: $3^{2n} - 2^n = 3^0 - 2^0 = 0$ est divisible par 7 donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^{2n} \times 3^2 - 2^{n+1} = 9 \times 3^{2n} - 2^{n+1}$ Or $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 donc $3^{2n} - 2^n = 7k$ où $k \in \mathbb{Z}$ et donc $3^{2n} = 7k + 2^n$ On en déduit que $3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 9 \times (7k + 2^n) - 2^{n+1} = 7 \times 9k + 9 \times 2^n - 2 \times 2^n$ $= 7 \times 9k + (9-2) \times 2^n = 7 \times 9k + 7 \times 2^n = 7 \times (9k + 2^n)$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Par conséquent $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$. <u>2^e méthode :</u> $3^2 = 9 \equiv 2\ [7]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, j'élève à la puissance n $(3^2)^n = 3^{2n} \equiv 2^n\ [7]$ et donc $3^{2n} - 2^n \equiv 0\ [7]$ De plus, $3^0 - 2^0 = 0$ est divisible par 7 Par conséquent $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

Nbre choisi	Dupliqué	Divisé par 13	Divisé par 7	Divisé par 11
341	341 341	26 257	3 751	341
786	786 786	60 522	8 646	786
205	205 205	15 785	2 255	205

On peut conjecturer que le résultat du programme de calcul donne le nombre choisi au départ.

Le nombre choisi au départ est $\overline{abc} = c + 10b + 100a$.

Nous le dupliquons :

$$\begin{aligned}\overline{abcabc} &= c + 10b + 100a + 1000c + 10\,000b + 100\,000a \\ &= 1001c + 10\,010b + 100\,100a = 13 \times (77c + 770b + 7\,700a) \\ &= 13 \times 7 \times (11c + 110b + 1\,100a) \\ &= 13 \times 7 \times 11 \times (c + 10b + 100a) = 13 \times 7 \times 11 \times \overline{abc}\end{aligned}$$

Le nombre obtenu est donc divisible par 13, par 7 et par 11 et le nombre restant sera celui choisi au départ.

Exercice 3.

$$13 \equiv 3\ [10]$$

J'élève au carré

$$13^2 \equiv 9\ [10] \equiv -1\ [10]$$

J'élève au carré

$$13^4 = (13^2)^2 \equiv (-1\ )^2\ [10] \equiv 1\ [10]$$

J'élève au cube

$$(13^4)^3 = 13^{12} \equiv 1\ [10]$$

Je multiplie par 13

$$13^{13} = 13^{12} \times 13 \equiv 1 \times 13\ [10] \equiv 13\ [10] \equiv 3\ [10]$$

Le chiffre des unités de 13^{13} est donc le chiffre 3.

$$2017 \equiv 7\ [10]$$
J'élève au carré
$$2017^2 \equiv 49\ [10] \equiv 9\ [10] \equiv -1\ [10]$$
J'élève au carré
$$2017^4 \equiv 1\ [10]$$
J'élève à la puissance 504
$$(2017^4)^{504} = 2017^{2016} \equiv 1\ [10]$$
Je multiplie par 2017
$$2017^{2017} \equiv 2017\ [10] \equiv 7\ [10]$$

Le chiffre des unités de 2017^{2017} est donc le chiffre 7.