Exercice 1.

1.

```
LIRE N
AFFICHER "N = "
AFFICHER N
U PREND_LA_VALEUR 0
POUR I ALLANT_DE 1 A N
  DEBUT_POUR
  U PREND_LA_VALEUR 8*U+7
  FIN_POUR
AFFICHER "U = "
AFFICHER U
```

```
***Algorithme lancé***
N = 2
U = 63
***Algorithme terminé
```

```
***Algorithme lancé***
N = 4
U = 4095
***Algorithme terminé
```

```
***Algorithme lancé***
N = 6
U = 262143
***Algorithme terminé
```

2.

$u_0 = 2^0 - 1 = 0$
$u_2 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$
$u_4 = 2^{12} - 1 = 4096 - 1 = 4095$
$u_6 = 2^{18} - 1 = 262\,144 - 1 = 262\,143$

Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 8u_n + 7$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = 2^{3(n+1)} - 1 = 2^{3n+3} - 1 = 8 \times 2^{3n} - 1$
or $8u_n + 7 = 8 \times (2^{3n} - 1) + 7 = 8 \times 2^{3n} - 8 + 7 = 8 \times 2^{3n} - 1 = u_{n+1}$

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : u_n est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation pour $n = 0$:

$$u_0 = 2^0 - 1 = 0 \text{ est divisible par } 7$$
$$\text{donc } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$$

Hérédité :
On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : u_n est divisible par 7 pour $n \in \mathbb{N}$ fixé

$$u_{n+1} = 8u_n + 7$$

Or 7 divise u_n et 7 est divise 7 donc 7 divise u_{n+1}

$$\text{donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}$$

Par conséquent u_n est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE A
  LIRE B
  N PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (A>=B) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    N PREND_LA_VALEUR N+1
    A PREND_LA_VALEUR A-B
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER N
  AFFICHER A
FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer A : 102
Entrer B : 3
34
0
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer A : 7865
Entrer B : 17
462
11
***Algorithme terminé***
```

Cet algorithme retranche le nombre B du nombre A autant de fois que possible jusqu'à obtenir un nombre inférieur à B. La variable N va alors compter le nombre de soustractions effectuées, il s'agit donc du quotient dans la division euclidienne de A par B. Lorsque l'on a soustrait N fois le nombre B, on a alors le reste dans la division euclidienne de A par B.
L'algorithme affiche donc le quotient puis le reste de la division euclidienne de A par B.

Exercice 3.

Pour tout entier naturel n,

$$bq + r = (n+1)(3n+4) + (n+7) = 3n^2 + 4n + 3n + 4 + n + 7$$
$$= 3n^2 + 8n + 11 = a$$

On a bien $a = bq + r$ mais

Le reste doit vérifier $0 \leq r < 3n + 4$

$$0 \leq n + 7 < 3n + 4$$
$$\Leftrightarrow 3 < 2n$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} < n$$

Pour construire un contre-exemple, je choisis alors $n = 1$:

$$a = 3n^2 + 8n + 11 = 22 \quad \text{et} \quad b = 3n + 4 = 7$$

Or $22 = 3 \times 7 + 1$, le reste est donc $1 \neq n + 7 = 8$

L'affirmation est donc fausse.